Задание 6. (На 23.10.09)

$\boxed{\textbf{SE41.}}$ В графе 2000 вершин, степени всех не меньше 1000. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

$\boxed{\textbf{SE42.}}$ В шеренгу стоит $mn+1$ человек. Докажите, что найдется либо $m+1$ человек, стоящие по росту справа налево, либо $n+1$ человек, стоящие по росту слева направо.

$\boxed{\textbf{SE43.}}$ Докажите, что в дереве есть совершенное паросочетание, тогда и только тогда, когда при удалении любой вершины в оставшемся графе ровно одна компонента связности состоит из нечетного числа вершин.

$\boxed{\textbf{SE44.}}$ В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

$\boxed{\textbf{SE45.}}$ Найдите максимальное из чисел $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

$\boxed{\textbf{SE46.}}$ Докажите, что a) $\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln t dt < \ln n!$; б) $e(\frac{n}{e})^n < n! < en(\frac{n}{e})^n$.

$\boxed{\textbf{SE47.}}$ Докажите, что $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)n} 2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e} 2^{H(\alpha)n}$, где $H(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

$\boxed{\textbf{SE39.}}$ В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

$\boxed{\textbf{SE40.}}$ Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.