Задание 7. (На 30.10.09)

$\boxed{\textbf{SE 48.}}$ Покажите, что если группа S_n порождена несколькими транспозициями, то их количество не менее $n-1$.

$\boxed{\textbf{SE 49.}}$ 30 студентов стоят в очереди в столовой. Время от времени какой-нибудь студент перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода студент не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 2007 прыжков?

$\boxed{\textbf{SE 50.}}$ На клетках таблицы 4×4, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?

$\boxed{\textbf{SE 51.}}$ **(Транснеравенство)** Известно, что $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n, y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$. Докажите, что $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1 \le x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \dots + x_ny_{\sigma(n)} \le x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, где σ — перестановка чисел от 1 до n.

$\boxed{\textbf{SE 52.}}$ Докажите, что произведение n подряд идущих чисел делится на $n!$.

$\boxed{\textbf{SE 53.}}$ а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Эти точки окрашиваются в n цветов. Сколько существует существенно различных раскрасок (существенно различными мы считаем раскраски, не переходящие друг в друга при поворотах окружности)? б) Выведите из результата п.а) малую теорему Ферма (для натуральных чисел a, не делящихся на p, $a^{p-1}-1 \vdots p$).

$\boxed{\textbf{SE 54.}}$ а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Сколько существует ориентированных звездчатых p-угольников (т.е. замкнутых p-звенных ломаных) с вершинами в этих p точках? Мы считаем два p-угольника различными, если они отличаются направлением обхода вершин. б) Выведите из результата п.а) теорему Вильсона: $(p-1)!+1 \vdots p$.

---

43. Докажите, что в дереве есть совершенное паросочетание, тогда и только тогда, когда при удалении любой вершины в оставшемся графе ровно одна компонента связности состоит из нечетного числа вершин.

47. Докажите, что $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)n^2}2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e}2^{H(\alpha)n}$, где $H(\alpha) = -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$, $0<\alpha<1$.