Задание 8 (на 06.11)

SE 55. а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ шагами $(1,1)$ и $(1,-1)$? б) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$. в) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость.

SE 56. а) Найдите количество последовательностей $a_1,a_2,\dots,a_{2n}$, для которых $a_i=\pm1$, $a_1\geq 0, a_1+a_2\geq 0,\dots,a_1+a_2+\dots+a_{2n-1}\geq 0, a_1+a_2+\dots+a_{2n}=0$. б) Кассир, у которого изначально нет денег продает билеты по 50 рублей. Очередь состоит из $2n$ человек, у половины из которых есть купюра в 100 рублей, а у половины 50 рублей. Сколько существует очередей, при которых кассир сможет дать всем сдачи? в) Посчитайте число способов разбить n-угольник на треугольники, не пересекающимися диагоналями. г) Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

SE 57. Разбиение числа n называется самосопряженным, если его диаграма Юнга симметрична относительно диагонали. Докажите, что число самосопряженных разбиений равняется числу разбиений числа n на различные нечетные слагаемые.

SE 58. Докажите, что среди любых а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, любо 3 попарно незнакомых; б) 10; в) 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

SE 59. В полном n-вершинном графе красят ребра так, что любые два ребра с общей вершиной окрашивались различными цветами. Какое наименьшее число цветов нужно для такой раскраски? а) n нечетно; б) n четно.

SE 60. Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел $1,2,3,...,N$. Для каждого подмножества берчтся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

SE 61. Вычислите суммы а) $\sum_{k=0}^{n-1}2^kx^k$; б) $\sum_{k=0}^{n-1}k2^k$; в) $\sum_{k=0}^{n-1}k^22^k$.

SE 62. Для каждого трехзначного числа берчм произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трчхзначных чисел, складываем. Сколько получится?

SE 54. а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Сколько существует ориентированных звездчатых p-угольников (т.е. замкнутых p-звенных ломаных) с вершинами в этих p точках? Мы считаем два p-угольника различными, если они отличаются направлением обхода вершин. б) Выведите из результата п.а) теорему Вильсона: $(p-1)!+1 \,\vdots\, p$.