

Задание 9 (на 13.11)

SE 64. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1} + 1$. Докажите, что в полном графе с a_{n+1} вершиной, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.

SE 65. Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

SE 66. Найдите производящие функции для последовательностей: а) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$; б) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$ в) $1^2, 2^2, 3^3, 4^2, \dots$

SE 67. Пусть $A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$. Найдите производящие функции последовательностей а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots$; б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$; в) $a_0, a_1b, a_2b^2, a_3b^3, \dots$; г) $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

SE 68. а) Пусть a_n — это число способов выбрать из n элементов набор из r элементов, причем разрешено брать 1 элемент несколько раз, а порядок не важен. Найдите производящую функцию для этой последовательности. И найдите формулу для a_n . б) А если каждый элемент разрешается включать в набор лишь четное число раз?

SE 69. Производящая функция последовательности a_n имеет вид $\frac{1-s^4}{1-s^3}$. Найдите рекуррентное соотношение наименьшего порядка (с некоторого места).

SE 70. Пусть a_n — это количество ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(n, 0)$ шагами $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Найдите производящую функцию этой последовательности (в замкнутом виде).

SE 71. Таблицей инверсий перестановки $\sigma \in S_n$ называется кортеж чисел $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)$, где $\tau(i)$ — это количество чисел $j < i$, что $\sigma(j) > \sigma(i)$. а) Покажите, что любой кортеж (t_1, t_2, \dots, t_n) , в котором $0 \leq t_i \leq i - 1$ является таблицей инверсии какой-то перестановки. б) Покажите, что каждое число от 0 до $n! - 1$ единственным образом представляется в виде $a_00! + a_11! + a_22! + \dots + a_{n-1}(n-1)!$, где $0 \leq a_i \leq i$.

SE 59. В полном n -вершинном графе красят ребра так, что любые два ребра с общей вершиной окрашивались различными цветами. Какое наименьшее число цветов нужно для такой раскраски? а) n нечетно; б) n четно.