

Комбинаторика и теория графов (осенний семестр 2009)

- 1!. Деревья, эквивалентные определения и свойства. Остовное дерево. [11]
- 2!. Плоские (планарные) графы. Формула Эйлера, K_5 и $K_{3,3}$. [11]
- 3*. Лемма о графах Куратовского. [13]
- 4*. Теорема Куратовского (без доказательства леммы). [13]
- 5!. Эйлеров путь и цикл. [11]
6. Достаточное условие Дирака существования гамильтонова цикла. [11]
- 7!. Потоки в сетях, лемма о потоке через разрез. Теорема Форда-Фолкерсона. Общий метод Форда-Фолкерсона построения максимального потока. [2, 11]
- 8!. Алгоритм построения максимального паросочетания. Теорема Кенига, теорема Холла. [2, 7]
9. Частично-упорядоченные множества. Теорема Дилвортса. [7]
10. Реберная и вершинная связность графа. Теоремы Менгера и критерий k -связности. [11]
11. Эквивалентные определения двусвязного графа. Дерево блоков и точек сочленения. [11]
12. Реберно двусвязные графы.
- 13*. Теорема Татта. [11]
14. Формула Бержа. Теорема Петерсена о паросочетании в k -регулярном графе. [11]
- 15!. Критерий двудольности графа. [11]
- 16!. Теорема Брукса для 3-связных графов. [11]
17. Критические графы, разрезы критических графов. Теорема Брукса. [11]
- 18!. Реберное хроматическое число двудольного графа. [11]
19. Теорема Визинга. [11]
20. Подсчет числа счастливых билетиков: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^3 dx$. [8]
- 21!. Действия с формальными степенными рядами, деление степенных рядов, обратная функция. Элементарные производящие функции. [8]
- 22!. Производящая функция для геометрической прогрессии. Числа Фибоначчи. Производящая функция рекуррентной последовательности. [8]
23. Критерий рациональности производящей функции последовательности. Произведение Адамара. [8]
- 24!. Числа Каталана: рекуррентное соотношение, производящая функция, явная формула. [8, 7]
- 25!. Разложения: производящая функция и формула. Разбиения: производящая функция, разбиение на различные слагаемые и разбиение на нечетные слагаемые. [8]
26. Пентагональная теорема Эйлера и вычисление числа разбиений. [8]
- 27!. Числа Стирлинга 1-го и 2-го рода, рекуррентные формулы и комбинаторный смысл. [6, 1]
- 28!. Формула включений-исключений: число сюръекций, счастливые билетки. [8, 6]
- 29!. Числа Рамсея $R(m, n)$, верхняя оценка. Случай многих цветов. Бесконечный вариант теоремы Рамсея. [3, 12]
- 30!. Обобщение чисел Рамсея на гиперграфы. Теорема Рамсея. [3, 12]
31. Примеры использования теоремы Рамсея: теорема Эрдеша-Секереша о выпуклом n -угольнике, раскраска натуральных чисел. [3, 12]
- 32!. Вероятностный метод: нижняя оценка на числа Рамсея $R(k, k)$, немногохроматическая раскраска n -однородного гиперграфа. [4, 12]
- 33!. Линейность математического ожидания: турнир с большим числом гамильтоновых путей, покрытие графа двудольными подграфами. [4, 12]
34. Метод малых вариаций: оценка размера независимого множества. [4, 12]
35. Поля, характеристика, линейные пространства над полями, порядок конечного поля. [5]
- 36*. Многочлены над полями, теоремы о делении с остатком, о линейном представлении НОД, поле $K[x]/\langle f \rangle$, поле разложения многочлена. [5]
- 37*. Существование конечного поля порядка p^n . [5]
- 38!. Коды с коррекцией ошибки. Код Хэмминга для бинарного и небинарного алфавитов. [7]
39. Код Рида-Соломона и его декодирование. [10]
- 40!. Код Адамара и его вероятностное декодирование. [10]
41. Комбинаторная теорема о нулях (Combinatorial Nullstellensatz). [9]

- 42*. Применение Combinatorial Nullstellensatz: теорема Коши-Дэвенпорта. Теорема Эрдеша-Гинзбурга-Зива. [9]
43. Применение Combinatorial Nullstellensatz: выделение p -регулярного подграфа. [9]

Список литературы

- [1] Р. Грэхем, Д. Кнут, and О. Поташник. *Конкретная математика*. Мир, 1998.
- [2] Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, and Р. Ривест. *Алгоритмы: построение и анализ*. МЦНМО, 2000.
- [3] М.В. Волков and Н.Н. Силкин. Кого послать на Марс? *Квант*, 8:51–57, 1988.
- [4] Н. Алон and Дж. Спенсер. *Вероятностный метод*. БИНОМ, Лаборатория знаний, 2007.
- [5] С. Ленг. *Алгебра*. 1968.
- [6] В. Липский. *Комбинаторика для программистов*. Мир, 1988.
- [7] И.В. Романовский. *Дискретный анализ*. Невский диалект, 2000.
- [8] С.К. Ландо. *Лекции о производящих функциях*. МЦНМО, 2002.
- [9] Noga Alon. Combinatorial Nullstellensatz. *Comb. Probab. Comput.*, 8(1-2):7–29, 1999.
- [10] S. Arora and B. Barak. *Computational complexity: a modern approach*. 2009.
- [11] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph theory with applications*. University of Waterloo, 1982.
- [12] S. Jukna. *Extremal combinatorics with applications in Computer Science*. 2001.
- [13] A. Skopenkov. A short proof of the kuratowski graph planarity criterion. *arXiv*, (0802.3820v2):1–14, 2009.

Порядок экзамена

Список вопросов на оценку 3: все вопросы, помеченные знаком "!". Список вопросов на оценку 4: все вопросы, кроме помеченных звездочкой. Список вопросов на оценку 5: все вопросы. Студент, претендующий на оценку t , должен знать формулировки всех утверждений и определений из всего списка вопросов и доказательства всех утверждений из списка вопросов на оценку t .

Экзамен состоит из трех основных частей.

1. Письменный ответ на тест из вопросов по всему курсу. Вопросы будут на знание и понимание определений и утверждений. Например: "Сформулируйте критерий двудольности графа." *Во время этой части экзамена ничем пользоваться нельзя*. По результатам ответов на вопросы определяется число t_1 — максимальная оценка, на которую может претендовать экзаменуемый (правило определения числа t_1 будет написано в самом тесте). t_2 — это оценка, на которую претендует экзаменуемый. $t := \min\{t_1, t_2\}$. Экзамен продолжается, если $t \geq 3$.
2. Выдается 2 вопроса из списка вопросов на оценку t . Требуется полностью ответить на эти вопросы. С потерей одного или двух баллов экзаменуемый может заменить вопрос на вопрос из более простой программы. Если в итоге не удастся ответить на 2 вопроса, то $t := 2$. *Во время этой части экзамена можно пользоваться только заранее заготовленной шпаргалкой (написанной от руки самим экзаменуемым на одном листе формата A4), которая должна быть предварительно одобрена экзаменатором*.
3. Если $t = 5$, то выдается задача. Если задача не решается экзаменуемым, то $t = 4$. Оценка за экзамен: t .