Задачи для первой аттестации

CS 1. Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

CS 2. Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

CS 3. Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрежается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

CS 4. Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.

CS 5. В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом оствного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него. а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса. б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса. в) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

CS 6. В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.

CS 7. Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

CS 8*. В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

CS 9. Докажите, что если вершины неориентированного графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $k+1$ цвет так, чтобы концы любого ребра были покрашены в разные цвета.

CS 10. Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $[k/2]+1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

CS 11. Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n-k$ ребер, то в нем как минимум k компонент связности.

CS 12. В неориентированном графе $2n$ вершин нет циклов длины 3. Докажите, что число ребер в нем не превосходит n^2, причем оценка n^2 достигается.

CS 13. Существует ли плоский граф, в котором степени всех вершин равняются 5?

CS 14. Докажите, что в любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

CS 15. В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

CS 16. Докажите, что вершины плоского графа можно правильным образом раскрасить в 5 цветов (так, чтобы ребра соединяли вершины разных цветов).

CS 17. Дано изображение плоского Эйлерова графа (степени всех вершин четны). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (так, чтобы соседние по ребру грани были бы покрашены в разные цвета).

CS 18. В сильно связном ориентированном графе (из каждой вершины можно добраться в каждую) у каждой вершины входящая степень равна исходящей. Докажите, что сущесвтует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

CS 19. а) Посчитайте сумму $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$ б) Посчитайте сумму $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$

CS 20. Дан набор натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (не обязательно различных). Пусть b_k - количество чисел в этом наборе, не меньших k. Докажите, что $\sum\limits_k b_k = \sum\limits_i a_i$.

CS 21. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит с четным количеством девочек; Докажите, что можно выбрать группу из нескольких мальчиков так, чтобы с каждой девочкой дружило четное число мальчиков из этой группы.

CS 22. В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

CS 23. Докажите, что если простой связный граф G имеет ровно две вершины при удалении которых, граф не теряет связность, то G – это путь.

CS 24. Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более половины ребер так, чтобы он превратился в двудольный.

CS 25. Автобусные билеты имеют 6-значные номера (номера могут начинаться с нуля). Билет называется счастливым, если суммы первых 3-х цифр его номера равняется сумме последних цифр его номера. Каких билетов больше счастливых или билетов с суммой цифр 27?

CS 26. $(x_1, x_2, ..., x_{2n})$ - перестановка чисел от 1 до $2n$. Назовем перестановку удобной если какие-то два соседних числа в ней различаются ровно на n. Докажите, что среди всех перестановок удобных больше половины.

CS 27. Докажите, что количество способов представить число N в виде не более, чем k натуральных слагаемых, не превосходящих n равняется числу способов представить N в виде не более, чем n натуральных слагаемых, не превосходящих k.

CS 28. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных натуральных чисел столькими способоами, сколькими его можно представить в виде суммы (не обязательно различных) нечетных слагаемых. (Например, 6=1+5=2+4=1+2+3, 1+5=3+3=3+1+1+1=1+1+1+1+1+1)

CS 29. а) Посчитайте количество способов разбить число n на k натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся порядком, считаются различными). б) Посчитайте количество способов разбить число n на k целых неотрицательных слагаемых (разбиения, отличающиеся порядком, считаются различными).

CS 30. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.

CS 31. Пусть G конечная группа и H подгруппа в ней. Докажите, что существует набор представителей $h_1, h_2 \ldots h_n$ в G такой, что $h_1H, h_2H, \ldots, h_nH$ — все левые классы смежности и $Hh_1, Hh_2, \ldots, Hh_n$ — все правые классы смежности.

CS 32. Докажите, что каждый $2k$-регулярный граф содержит 2-регулярный подграф.

CS *. Докажите, что в турнире (полный ориентированный граф, между любыми двумя вершинами есть ровно одно ребро) обязательно есть гамильтонов путь.

CS **. Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.