Задачи для второй аттестации
Часть 1. Паросочетания.

CS33. (Полигамный вариант леммы о девушках). Каждому юноше нравится несколько девушек, причем любому набору из k юношей в совокупности нравится не менее, чем km девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить гарем из m нравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.

CS34. На улице Болтунов живут n юношей и n девушек, причем каждый юноша знаком ровно с k девушками, а каждая девушка - ровно с k юношами. а) Докажите, что все юноши и девушки могут одновременно говорить со своими знакомыми по телефону. б) Докажите, что юноши и девушки могут звонить друг другу по телефону так, чтобы за k часов каждый поговорил с каждым из своих знакомых по часу.

CS35. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

CS36. В некоторых клетках прямоугольной таблицы стоят звездочки, причем в каждой строке стоит хотя бы одна звездочка. Известно, что строк в таблице больше, чем столбцов. Докажите, что найдется звездочка, в строке которой стоит меньше звездочек, чем в столбце.

CS37. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

CS38. В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

CS41. В графе 2000 вершин, степени всех не меньше 1000. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

CS42. В шеренгу стоит $mn+1$ человек. Докажите, что найдется либо $m+1$ человек, стоящие по росту справа налево, либо $n+1$ человек, стоящие по росту слева направо.

CS43. Докажите, что в дереве есть совершенное паросочетание, тогда и только тогда, когда при удалении любой вершины в оставшемся графе ровно одна компонента связности состоит из нечетного числа вершин.

CS44. В связном графе 100 вершин и для любых $k \leq 50$ вершин найдется не меньше, чем $2k$ вершин, соединенных с одной их этих k. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

Часть B. Элементарная комбинаторика.

CS46. Найдите максимальное из чисел $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

CS47. Докажите, что а) $\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln t dt < \ln n!$; б) $e(\frac{n}{e})^n < n! < en(\frac{n}{e})^n$. в) Докажите, что $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)n}2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e}2^{H(\alpha)n}$, где $H(\alpha) = -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

CS48. Докажите, что произведение n подряд идущих чисел делится на $n!$.

CS49. Покажите, что если группа S_n порождена несколькими транспозициями, то их количество не менее $n-1$.

CS50. 30 студентов стоят в очереди в столовой. Время от времени какой-нибудь студент перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода студент не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 2007 прыжков?

CS51. На клетках таблицы 4×4, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?

CS52. **(Транснеравенство)** Известно, что $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n, y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$. Докажите, что $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1 \leq x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ny_{\sigma(n)} \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, где σ — перестановка чисел от 1 до n.

CS72. Таблицей инверсий перестановки $\sigma \in S_n$ называется кортеж чисел $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$, где $\tau(i)$ — это количество чисел $j < i$, что $\sigma(j) > \sigma(i)$. а) Покажите, что любой кортеж $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, в котором $0 \leq t_i \leq i-1$ является таблицей инверсии какой-то перестановки. б) Покажите, что каждое число от 0 до $n!-1$ единственным образом представляется в виде $a_0 0! + a_1 1! + a_2 2! + \cdots + a_{n-1}(n-1)!$, где $0 \leq a_i \leq i$.

Часть C. Графы (раскраски, связность).

CS53. **(Хроматический многочлен графа)**. Пусть $\chi_G(t)$ - это количество способов правильно покрасить вершины графа в t цветов. (Раскраска называется правильной, если любые две вершины, соединенные ребром, покрашены в разные цвета.)

а) Покажите, что если граф G — это граф с n вершинами и без ребер, то $\chi_G(t) = t^n$.

б) покажите, что если граф G — это дерево на n вершинах, то $\chi_G(t) = t(t-1)^{n-1}$.

в) покажите, что если граф G - это полный граф на n вершинах, то $\chi_G(t) = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)$.

Естественно возникает идея, что $\chi_G(t)$ - это какой-то многочлен от переменной t. Далее приводится способ, позволяющий одновременно и доказать этот факт, и вычислить сам многочлен.

г) Пусть в графе G вершины a, b не соединены ребром. Покажите. что число способов правильно раскрасить вершины графа G в t цветов равно количеству способов правильно раскрасить вершины этого графа в t цветов так, что вершины a, b разного цвета, плюс количество способов правильно покрасить вершины графа в t цветов так, чтобы вершины A, B были одного цвета.

д) Пусть в графе G есть некоторое ребро e. Обозначим за $G-e$ граф, полученный из G выкидыванием ребра e, а за G/e - граф, полученный из G стягиванием ребра e, т.е. выкидыванием ребра e и склеиванием его концов. Например, если в цикле стянуть одно ребро, то получится цикл, длины на 1 меньшей.

Докажите, что $\chi_{G-e}(t) = \chi_G(t) + \chi_{G/e}(t)$.

е) Докажите, что $\chi_G(t)$ есть многочлен от t (разумеется, для разных графов он, обычно, разный.)

$\boxed{\textbf{CS54.}}$ Пусть в графе G содержится n вершин, m ребер и k компонент связности $G_1, G_2 \dots G_k$, тогда а) Старший коэффициент $\chi_G(t)$ равен 1.

б) Коэффициент при t^{n-1} равен $-m$.

в) Коэффицинты при $t^0, t^1, \dots, t^{k-1}$ все нули.

г) Коэффициент при t^k отличен от нуля.

д) $\chi_G(t) = \chi_{G_1}(t)\chi_{G_2}(t)\dots\chi_{G_k}(t)$.

е) Докажите, что знаки коэффициентов хроматического многочлена чередуются.

ж) Докажите, что граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда его хроматический многочлен равен $t(t-1)^{n-1}$.

$\boxed{\textbf{CS61.}}$ В полном n-вершинном графе красят ребра так, что любые два ребра с общей вершиной окрашивались различными цветами. Какое наименьшее число цветов нужно для такой раскраски?

$\boxed{\textbf{CS62.}}$ Ребра связного графа покрашены в три цвета так, что из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. Докажите, что можно обойти все вершины графа, не проходя ни по какому ребру в разных направлениях.

$\boxed{\textbf{CS63.}}$ Докажите, что если G — произвольный не пустой регулярный граф (степени всех вершин равны) с нечетным числом вершин, то $\chi'(G) = \Delta + 1$, где Δ - максимальныя степень в графе.

$\boxed{\textbf{CS64.}}$ Докажите, что если в графе любые два нечетные цикла имеют общую вершину, то $\chi(G) \leq 5$.

$\boxed{\textbf{CS70.}}$ Докажите, что модуль значения хроматического многочлена в точке -1 равен числу ациклических ориентаций графа.

$\boxed{\textbf{CS71.}}$ а) Сколько диагоналей в триангуляции n-угольника? б) Докажите, что у всех графов, которые получаются как триангуляция выпуколого n-угольника, одинаковые хроматические многочлены.

$\boxed{\textbf{CS39.}}$ Через $k(G)$ или просто k обозначается вершинная связность графа G (т.е. такое минимальное число, что при удалении каких-то k вершин граф теряет связность. Граф состоящий из одной вершины будем считать несвязным). Аналогично определяется $k'(G)$, как реберная связность графа. Докажите, что в 3-регулярном графе $k = k'$.

$\boxed{\textbf{CS40.}}$ В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

$\boxed{\textbf{CS45.}}$ Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.

Часть C. Числа Каталана, Рамсея, производящие функции.

$\boxed{\textbf{CS57.}}$ а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ шагами $(1,1)$ и $(1,-1)$? б) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$. в) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость.

$\boxed{\textbf{CS58.}}$ а) Найдите количество последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, для которых $a_i = \pm 1$, $a_1 \geq 0, a_1 + a_2 \geq 0, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1} \geq 0, a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 0$. б) Кассир, у которого изначально нет денег продает билеты по 50 рублей. Очередь состоит из $2n$ человек, у половины из которых есть купюра в 100 рублей, а у половины 50 рублей. Сколько существует очередей, при которых кассир сможет дать всем сдачи? в) Посчитайте число способов разбить n-угольник на треугольники, не пересекающимися диагоналями. г) Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

$\boxed{\textbf{CS59.}}$ Разбиение числа n называется самосопряженным, если его диаграма Юнга симметрична относительно диагонали. Докажите, что число самосопряженных разбиений равняется числу разбиений числа n на различные нечетные слагаемые.

$\boxed{\textbf{CS60.}}$ Докажите, что среди любых а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых; б) 10; в) 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых. г) Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

$\boxed{\textbf{CS65.}}$ Найдите производящие функции для последовательностей: а) $1,2,3,4,5,6,\dots$; б) $1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4, \dots$. в) $1^2, 2^2, 3^3, 4^2, \dots$

$\boxed{\textbf{CS66.}}$ Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$. Найдите производящие функции последовательностей а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots$; б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots$; в) $a_0, a_1 b, a_2 b^2, a_3 b^3, \dots$; г) $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$.

$\boxed{\textbf{CS67.}}$ а) Пусть a_n — это число способов выбрать из n элементов набор из r элементов, причем разрешено брать 1 элемент несколько раз, а порядок не важен. Найдите производящую функцию для этой последовательности. И найдите формулу для a_n. б)А если каждый элемент разрешается включать в набор лишь четное число раз?

$\boxed{\textbf{CS68.}}$ Производящая функция последовательности a_n имеет вид $\frac{1-s^4}{1-s^3}$. Найдите рекуррентное соотношение наименьшего порядка (с некоторого места).

$\boxed{\textbf{CS69.}}$ Пусть a_n — это количество ломанных, идущих из точки $(0,0)$ в точку $(n,0)$ шагами $(1,1)$, $(1,-1)$ и $(1,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Найдите производящую функцию этой последовательности (в замкнутом виде).