Автоматы:

- Дима: EFG
- Федя: E
- Юля: EF
- Света: EF

Часть E. Производящие функции.

$\boxed{\textbf{CS74.}}$ Берутся всевозможные непустые подмножества нечетной мощности из множества чисел $1, 2, 3, \ldots, N$. Для каждого такого подмножества нечетной мощности берчтся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

$\boxed{\textbf{CS75.}}$ Докажите, что число разбиений числа n, в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений n в которых нет части, встречающейся более чем три раза.

$\boxed{\textbf{CS76.}}$ Фаном называется граф, состоящий из вершин $\{0, 1, 2\ , \ldots, n\}$, вершина 0 соединена ребром со всеми остальными вершинами, кроме того вершина i соединена ребром с вершиной $i+1$ для всех $1 \leq i \leq n-1$. Пусть f_n — это количество остовных деревьев фана. а) Докажите, что $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \cdots + f_1 + 1$; б) Найдите производящую функцию последовательности f_n; в) Найдите f_n.

$\boxed{\textbf{CS77.}}$ Найдите количество способов разбить доску $3 \times n$ на доминошки. Указание: найти рекуррентное соотношение и производящую функцию.

$\boxed{\textbf{CS78.}}$ Решите рекуррентное соотношение: $g_0 = 1, g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \cdots + ng_0$.

Определение. Экспоненциальной производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется ряд $\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \ldots$

$\boxed{\textbf{CS79.}}$ Найдите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $1, 1, 1, 1, \ldots$; б) $1, -1, 1, -1, 1, -1$; в) $A(s)$ — экпоненциальная производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, какая будет экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$? Вычислите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: г) $a_n = q^n$; д) $a_n = n$; е) $a_n = n(n-1)$; ж) $a_n = n^2$

$\boxed{\textbf{CS80.}}$ Вычислите экспоненциальную производящую функцию для чисел Фибоначчи.

$\boxed{\textbf{CS81.}}$ Докажите, что степенные ряды $a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$, $a_1 \neq 0$ образуют группу относительно операции композиции.

$\boxed{\textbf{CS82.}}$ Найдите производящую функцию числа разбиений на k слагаемых.

$\boxed{\textbf{CS83.}}$ Докажите, что $(1 + s + s^2 + \cdots + s^9)(1 + s^{10} + \cdots + s^{90})(1 + s^{100} + \cdots + s^{900}) \cdots = \frac{1}{1-s}$.

$\boxed{\textbf{CS88.}}$ Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящкй функции для последовательности C_n^k: $\sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$.

Часть F. Вероятностный метод

$\boxed{\textbf{CS90.}}$ Пусть $n \geq 2$, $H(V, E)$ — n-однородный (Ребра — это n-вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| = 4^{n-1}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что ни одно ребро не является монохроматическим.

$\boxed{\textbf{CS91.}}$ Пусть $n \geq 4$, $H(V, E)$ — n-однородный (Ребра — это n-вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| \leq \frac{4^{n-1}}{3^n}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что в каждом ребре присутствуют все 4 цвета.

$\boxed{\textbf{CS92.}}$ Докажите, что если $C_n^k(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$, то существует турнир из n команд, в котором для любых k команд существует команда, которая выиграла у всех этих k.

$\boxed{\textbf{CS93.}}$ Рассмотрим множество всех пар (A, B) непересекающихся k-элементных подмножеств $\{1, 2, \ldots, n\}$. Множество Y отделяет пару (A, B), если $A \subseteq Y$ и $B \cap Y = \emptyset$. Докажите, что существует $l = 3k4klnn$ множеств, что каждая пара (A, B) отделима хотя бы одним из них.

$\boxed{\textbf{CS94.}}$ Докажите, что если в графе степень каждой вершины как минимум d, то в этом графе есть доминирующее множество размера не больше, чем $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$.

$\boxed{\textbf{CS95.}}$ Докажите, что каждое множество, состоящее из n отличных от нуля вещественных чисел, содержит подмножество A мощности строго большей, чем $\frac{n}{3}$, в котором нет троек $a_1, a_2, a_3 \in A$, удовлетворяющих равенству $a_1 + a_2 = a_3$.

Часть G. Комбинаторика и графы.

$\boxed{\textbf{CS96.}}$ На множестве $\{0,1\}^n$ введены операции $+$ (покоординатно) и $*$ так, чтобы получилась структура поля. Для $x \in \{0,1\}^n$ обозначим за $(x)_{\leq m}$ вектор, получающийся из первых m координат x $(1 \leq m \leq n)$. Докажите, что для каждого $c \in \{0,1\}^n, c \neq 0$ отображение $x \mapsto (c * x)_{\leq m}$ принимает каждое значение из $\{0,1\}^m$ по 2^{n-m} раз.

$\boxed{\textbf{CS97.}}$ Беспорядком называется перестановка, которая не имеет неподвижных точек $(\forall i \sigma(i) \neq i)$. Пусть π_n — это число беспорядков на n элементах. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_n}{n!}$.

$\boxed{\textbf{CS98.}}$ В матрице $2n \times 2n$ стоят нули на главной диагонали, а во всех остальных строчках стоят ± 1. Докажите, что определитель этой матрицы отличен от нуля.

$\boxed{\textbf{CS99.}}$ Докажите, что для любых конечных множеств $I \subseteq J$ выполняется $\sum_{I \subseteq K \subseteq J} (-1)^{|K \setminus I|} = \begin{cases} 1, \text{если } I = J \\ 0, \text{если } I \neq J \end{cases}$

$\boxed{\textbf{CS22.}}$ В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

$\boxed{\textbf{CS45.}}$ Докажите, что из любого двусвязного графа, степени всех вершин которого больше двух, можно удалить вершину так, чтобы граф остался двусвязным.

$\boxed{\textbf{CS73.}}$ Докажите, что число плоских бинарных деревьвев с одним корнем (корень — это вершина степени 1) и n листьями равняется числу Каталана c_{n-1}.

$\boxed{\textbf{CS85.}}$ Докажите, что натуральное число n может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых $2^{n-1} - 1$ способом, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых считать различными.

$\boxed{\textbf{CS86.}}$ Докажите, что для каждого $m \geq 0$ матрица чисел Стирлинга первого рода $[s(n,k)]_{0 \leq n,k \leq m}$ есть обратная матрица для матрицы чисел Стирлинра второго рода $[S(n,k)]_{0 \leq n,k \leq m}$.

$\boxed{\textbf{CS87.}}$ Помеченное дерево - это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из n вершин? в) Постройте биекцию между помеченными деревьями с двумя выделенными вершинами (одну вершину называем началом, другую концом, причем начало и конец могут совпадать) и отображениями из $\{1, 2 \ldots, n\}$ в $\{1, 2 \ldots, n\}$.

$\boxed{\textbf{CS89.}}$ По каналу связи требуется передать информацию, состоящую из 10 битов. Известно, что максимум один из передаваемых битов исказится. Докажите, что невозможно придумать надежную схему, которая требовала бы передачи всего 13 битов. А как обойтись 14 битами?