Задачи для второй аттестации
Часть A. Паросочетания.

$\boxed{\textbf{SE33.}}$ Пусть G конечная группа и H подгруппа в ней. Докажите, что существует набор представителей $h_1, h_2 \dots h_n$ в G такой, что $h_1H, h_2H, \dots, h_nH$ — все левые классы смежности и $Hh_1, Hh_2, \dots, Hh_n$ — все правые классы смежности.

$\boxed{\textbf{SE34.}}$ (Полигамный вариант леммы о девушках). Каждому юноше нравится несколько девушек, причем любому набору из k юношей в совокупности нравится не менее, чем km девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить гарем из m нравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.

$\boxed{\textbf{SE35.}}$ На улице Болтунов живут n юношей и n девушек, причем каждый юноша знаком ровно с k девушками, а каждая девушка - ровно с k юношами. а) Докажите, что все юноши и девушки могут одновременно говорить со своими знакомыми по телефону. б) Докажите, что юноши и девушки могут звонить друг другу по телефону так, чтобы за k часов каждый поговорил с каждым из своих знакомых по часу.

$\boxed{\textbf{SE36.}}$ Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

$\boxed{\textbf{SE37.}}$ Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

$\boxed{\textbf{SE38.}}$ В некоторых клетках прямоугольной таблицы стоят звездочки, причем в каждой строке стоит хотя бы одна звездочка. Известно, что строк в таблице больше, чем столбцов. Докажите, что найдется звездочка, в строке которой стоит меньше звездочек, чем в столбце.

$\boxed{\textbf{SE39.}}$ В графе все вершины степени 3. Докажите, что можно так покрасить ребра в два цвета, что из каждой вершины выходят ребра обоих цветов.

$\boxed{\textbf{SE40.}}$ Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

$\boxed{\textbf{SE41.}}$ В графе 2000 вершин, степени всех не меньше 1000. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

$\boxed{\textbf{SE42.}}$ В шеренгу стоит $mn+1$ человек. Докажите, что найдется либо $m+1$ человек, стоящие по росту справа налево, либо $n+1$ человек, стоящие по росту слева направо.

$\boxed{\textbf{SE43.}}$ Докажите, что в дереве есть совершенное паросочетание, тогда и только тогда, когда при удалении любой вершины в оставшемся графе ровно одна компонента связности состоит из нечетного числа вершин.

Часть B. Элементарная комбинаторика.

$\boxed{\textbf{SE45.}}$ Найдите максимальное из чисел $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$.

$\boxed{\textbf{SE46.}}$ Докажите, что а) $\ln((n-1)!) < \int_1^n \ln t dt < \ln n!$; б) $e(\frac{n}{e})^n < n! < en(\frac{n}{e})^n$.

$\boxed{\textbf{SE47.}}$ Докажите, что $\frac{1}{e\alpha(1-\alpha)n}2^{H(\alpha)n} < C_n^{\alpha n} < \frac{n}{e}2^{H(\alpha)n}$, где $H(\alpha) = -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

$\boxed{\textbf{SE48.}}$ Покажите, что если группа S_n порождена несколькими транспозициями, то их количество не менее $n-1$.

$\boxed{\textbf{SE49.}}$ 30 студентов стоят в очереди в столовой. Время от времени какой-нибудь студент перепрыгивает через своего соседа (перепрыгнуть сразу через двух обессилевший от голода студент не может). Могут ли они вернуться в исходное положение ровно за 2007 прыжков?

$\boxed{\textbf{SE50.}}$ На клетках таблицы 4×4, кроме правой нижней, расставлены (слева направо в строчках и сверху вниз) квадратики с написанными на них числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14. Разрешается передвинуть на свободную клетку квадратик из любой клетки, примыкающей к ней по стороне. Можно ли с помощью таких операций поменять местами числа 14 и 15?

$\boxed{\textbf{SE51.}}$ **(Транснеравенство)** Известно, что $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n, y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$. Докажите, что $x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1 \le x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \dots + x_ny_{\sigma(n)} \le x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, где σ — перестановка чисел от 1 до n.

$\boxed{\textbf{SE52.}}$ Докажите, что произведение n подряд идущих чисел делится на $n!$.

$\boxed{\textbf{SE53.}}$ а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Эти точки окрашиваются в n цветов. Сколько существует существенно различных раскрасок (существенно различными мы считаем раскраски, не переходящие друг в друга при поворотах окружности)? б) Выведите из результата п.а) малую теорему Ферма (для натуральных чисел a, не делящихся на p, $a^{p-1} - 1 \,\vdots\, p$).

$\boxed{\textbf{SE54.}}$ а) p точек (p — простое число) разбивают окружность на p равных дуг. Сколько существует ориентированных звездчатых p-угольников (т.е. замкнутых p-звенных ломаных) с вершинами в этих p точках? Мы считаем два p-угольника различными, если они отличаются направлением обхода вершин. б) Выведите из результата п.а) теорему Вильсона: $(p-1)!+1 \,\vdots\, p$.

$\boxed{\textbf{SE71.}}$ Таблицей инверсий перестановки $\sigma \in S_n$ называется кортеж чисел $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)$, где $\tau(i)$ — это количество чисел $j < i$, что $\sigma(j) > \sigma(i)$. а) Покажите, что любой кортеж $(t_1, t_2, \dots, t_n)$, в котором $0 \le t_i \le i-1$ является таблицей инверсии какой-то перестановки. б) Покажите, что каждое число от 0 до $n!-1$ единственным образом представляется в виде $a_0 0! + a_1 1! + a_2 2! + \dots + a_{n-1}(n-1)!$, где $0 \le a_i \le i$.

Часть C. Числа Каталана, Рамсея и графы.

$\boxed{\textbf{SE44.}}$ В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

$\boxed{\textbf{SE55.}}$ а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ шагами $(1,1)$ и $(1,-1)$? б) Покажите, что число ломанных, из $(0,0)$ в $(2n,0)$, пересекающих прямую $y=-1$, равняется числу ломанных из $(0,0)$ в $(2n,-2)$. в) Найдите число ломанных из $(0,0)$ в $(2n,0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость.

$\boxed{\textbf{SE56.}}$ а) Найдите количество последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, для которых $a_i = \pm 1$, $a_1 \ge 0, a_1 + a_2 \ge 0, \dots, a_1 +$

рублей. Очередь состоит из $2n$ человек, у половины из которых есть купюра в 100 рублей, а у половины 50 рублей. Сколько существует очередей, при которых кассир сможет дать всем сдачи? в) Посчитайте число способов разбить n-угольник на треугольники, не пересекающимися диагоналями. г) Посчитайте количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

SE57. Разбиение числа n называется самосопряженным, если его диаграма Юнга симметрична относительно диагонали. Докажите, что число самосопряженных разбиений равняется числу разбиений числа n на различные нечетные слагаемые.

SE58. Докажите, что среди любых а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, любо 3 попарно незнакомых; б) 10; в) 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

SE59. В полном n-вершинном графе красят ребра так, что любые два ребра с общей вершиной окрашивались различными цветами. Какое наименьшее число цветов нужно для такой раскраски? а) n нечетно; б) n четно.

SE64. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1} + 1$. Докажите, что в полном графе с a_{n+1} вершиной, ребра которого окрашены в n цветов, найдется треугольник с одноцветными сторонами.

SE65. Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

Часть D. Производящие функции

SE60. Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел $1, 2, 3, ..., N$. Для каждого подмножества берчтся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

SE61. Вычислите суммы а) $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k x^k$; б) $\sum_{k=0}^{n-1} k2^k$; в) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 2^k$.

SE62. Для каждого трехзначного числа берчм произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трчхзначных чисел, складываем. Сколько получится?

SE66. Найдите производящие функции для последовательностей: а) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$; б) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots$. в) $1^2, 2^2, 3^3, 4^2, \ldots$

SE67. Пусть $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$. Найдите производящие функции последовательностей а) $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$; б) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$; в) $a_0, a_1 b, a_2 b^2, a_3 b^3, \ldots$; г) $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$.

SE68. а) Пусть a_n — это число способов выбрать из r элементов набор из n элементов, причем разрешено брать 1 элемент несколько раз, а порядок не важен. Найдите производящую функцию для этой последовательности. И найдите формулу для a_n. б)А если каждый элемент разрешается включать в набор лишь четное число раз?

SE69. Производящая функция последовательности a_n имеет вид $\frac{1-s^4}{1-s^3}$. Найдите рекуррентное соотношение наименьшего порядка (с некоторого места).

SE70. Пусть a_n — это количество ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(n, 0)$ шагами $(1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Найдите производящую функцию этой последовательности (в замкнутом виде).