Часть E. Производящие функции

$\boxed{\textbf{SE73.}}$ Берутся всевозможные непустые подмножества нечетной мощности из множества чисел $1, 2, 3, \ldots, N$. Для каждого такого подмножества нечетной мощности берчтся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найти сумму всех таких обратных величин.

$\boxed{\textbf{SE74.}}$ Докажите, что число разбиений числа n, в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений n в которых нет части, встречающейся более чем три раза.

$\boxed{\textbf{SE75.}}$ Фаном называется граф, состоящий из вершин $\{0, 1, 2\ , \ldots, n\}$, вершина 0 соединена ребром со всеми остальными вершинами, кроме того вершина i соединена ребром с вершиной $i + 1$ для всех $1 \leq i \leq n - 1$. Пусть f_n — это количество остовных деревьев фана. а) Докажите, что $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \cdots + f_1 + 1$; б) Найдите производящую функцию последовательности f_n; в) Найдите f_n.

$\boxed{\textbf{SE76.}}$ Найдите количество способов разбить доску $3 \times n$ на доминошки. Указание: найти рекуррентное соотношение и производящую функцию.

$\boxed{\textbf{SE77.}}$ Решите рекуррентное соотношение: $g_0 = 1, g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + 3g_{n-3} + \cdots + ng_0$.

Определение. Экспоненциальной производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется ряд $\frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}s + \frac{a_2}{2!}s^2 + \ldots$

$\boxed{\textbf{SE78.}}$ Найдите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: а) $1, 1, 1, 1, \ldots$; б) $1, -1, 1, -1, 1, -1$; в) $A(s)$ — экпоненциальная производящая функция для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, какая будет экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$? Вычислите экспоненциальную производящую функцию для последовательностей: г) $a_n = q^n$; д) $a_n = n$; е) $a_n = n(n - 1)$; ж) $a_n = n^2$

$\boxed{\textbf{SE79.}}$ Вычислите экспоненциальную производящую функцию для чисел Фибоначчи.

$\boxed{\textbf{SE80.}}$ Докажите, что степенные ряды $a_1s + a_2s^2 + \ldots$, $a_1 \neq 0$ образуют группу относительно операции композиции.

$\boxed{\textbf{SE81.}}$ Найдите производящую функцию числа разбиений на k слагаемых.

$\boxed{\textbf{SE82.}}$ Докажите, что $(1 + s + s^2 + \cdots + s^9)(1 + s^{10} + \cdots + s^{90})(1 + s^{100} + \cdots + s^{900}) \cdots = \frac{1}{1-s}$.

$\boxed{\textbf{SE85.}}$ Для последовательностей с двумя параметрами рассматривают производящие функции от двух переменных. Найдите замкнутый вид производящкй функции для последовательности C_n^k: $\sum_{n,k} C_n^k x^n y^k$.

Часть F. Элементарная комбинаторика

$\boxed{\textbf{SE83.}}$ Докажите, что натуральное число n может быть представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых $2^{n-1} - 1$ способом, если два представления, отличающиеся порядком слагаемых считать различными.

$\boxed{\textbf{SE84.}}$ Помеченное дерево - это дерево, вершины которого пронумерованы. Каждому помеченному дереву можно сопоставить код Прюфера: выбираем лист с наименьшим номером, записываем номер вершины, к которой этот лист прикреплен, удаляем лист и т.д. пока не останется одна вершина (с каким номером?). а) Докажите, что по коду Прюфера помеченное дерево однозначно восстанавливается. б) Сколько существует помеченных деревьев из n вершин?

$\boxed{\textbf{SE86.}}$ По каналу связи требуется передать информацию, состоящую из 10 битов. Известно, что максимум один из передаваемых битов исказится. Докажите, что невозможно придумать надежную схему, которая требовала бы передачи всего 13 битов. А как обойтись 14 битами?

$\boxed{\textbf{SE91.}}$ $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. а) Докажите, что $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$. б) Докажите, что сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи. в) Докажите тождество $C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \cdots = F_n$. г) Докажите тождество $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.

$\boxed{\textbf{SE72.}}$ Докажите, что число плоских бинарных деревьвев с одним корнем (корень — это вершина степени 1) и n листьями равняется числу Каталана c_{n-1}.

$\boxed{\textbf{SE95.}}$ Докажите, что для любых конечных множеств $I \subseteq J$ выполняется $\sum_{I \subseteq K \subseteq J} (-1)^{|K \setminus I|} = \begin{cases} 1, \text{если } I = J \\ 0, \text{если } I \neq J \end{cases}$

Часть G. Комбинаторные методы

$\boxed{\textbf{SE87.}}$ Пусть $n \geq 2$, $H(V, E)$ — n-однородный (Ребра — это n-вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| = 4^{n-1}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что ни одно ребро не является монохроматическим.

SE88. Пусть $n \geq 4$, $H(V, E)$ — n-однородный (Ребра — это n-вершинные подмножества V) гиперграф с числом ребер, равным $|E| \leq \frac{4^{n-1}}{3^n}$. Покажите, что существует такая раскраска множества вершин V в 4 цвета, что в каждом ребре присутствуют все 4 цвета.

SE89. Докажите, что если $C_n^k(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то существует турнир из n команд, в котором для любых k команд существует команда, которая выиграла у всех этих k.

SE90. В графе n вершин и m ребер. Докажите, что из этого графа можно удалить не более, чем $\frac{m}{k}$ ребер так, чтобы вершины получившегося графа можно было бы правильным образом покрасить в k цветов.

SE92. На множестве $\{0,1\}^n$ введены операции $+$ (покоординатно) и $*$ так, чтобы получилась структура поля. Для $x \in \{0,1\}^n$ обозначим за $(x)_{\leq m}$ вектор, получающийся из первых m координат x ($1 \leq m \leq n$). Докажите, что для каждого $c \in \{0,1\}^n, c \neq 0$ отображение $x \mapsto (c * x)_{\leq m}$ принимает каждое значение из $\{0,1\}^m$ по 2^{n-m} раз.

SE93. Беспорядком называется перестановка, которая не имеет неподвижных точек ($\forall i \sigma(i) \neq i$). Пусть π_n — это число беспорядков на n элементах. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_n}{n!}$.

SE94. В матрице $2n \times 2n$ стоят нули на главной диагонали, а во всех остальных строчках стоят ± 1. Докажите, что определитель этой матрицы отличен от нуля.