

Задание 3

Определения. Мы называем алгоритмы \mathcal{A} и \mathcal{B} эквивалентными если

- $\forall x \mathcal{A}(x)$ останавливается $\iff \mathcal{B}(x)$ останавливается;
- $\forall x$ если $\mathcal{A}(x)$ останавливается, то и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$.

Такую же эквивалентность можно ввести на множестве натуральных чисел $a \equiv b \iff \langle a \rangle \sim \langle b \rangle$. Множество $S \subseteq \mathbb{N}$ называется инвариантным, если $\forall a \in S, b \in \mathbb{N} \setminus S, a \neq b$.

17. (Теорема Успенского-Райса) Докажите, что если множество S инвариантно и разрешимо, то либо $S = \emptyset$, либо $S = \mathbb{N}$.

18. а) Докажите, что для любой вычислимой функции f существует всюду определенная вычислимая функция g , которая является \equiv -продолжением f , т.е. для всех x для которых определено $f(x)$ выполняется $f(x) \equiv g(x)$. б) (Теорема Клини о неподвижной точке) h — всюду определенная вычислимая функция. Тогда $\exists m \in \mathbb{N}$, что $m \equiv h(m)$. *Подсказка: пусть $u(n) = \langle n \rangle(n)$, а $u'(n)$ — это \equiv -продолжение $u(n)$. Выберите m равным номеру алгоритма, который вычисляет функцию $h(u'(n))$.*

19. Используя теорему Клини а) докажите, что существует алгоритм, который на всех входах выводит свой номер; б) покажите, что существует алгоритм, который всюду применим и выдает 1 на числе, которое является квадратом его номера, а на всех остальных входах выдает ноль; в) докажите, что существуют два различных алгоритма \mathcal{A} и \mathcal{B} , что алгоритм \mathcal{A} печатает $\#\mathcal{B}$, а алгоритм \mathcal{B} печатает $\#\mathcal{A}$.

20. Покажите, что если $P = NP$, то $EXP = NEXP$, где $NEXP = \cup_{c>0} NTime[2^{n^c}]$.

21. Докажите, что нет алгоритма, который бы проверил, верно ли, что данная машина Тьюринга работает время $100n^2 + 200$.

22. По формуле в 2-КНФ построим ориентированный граф. Вершинами графа будут множество переменных и отрицаний переменных. Для каждого дизъюнкта $(l_1 \vee l_2)$ в графе проводится два ребра из $\neg l_1$ в l_2 и из $\neg l_2$ в l_1 . Докажите, что формула выполнима тогда и только тогда, когда для каждой переменной x вершины x и $\neg x$ находятся в разных компонентах сильной связности.

Определение. Дизъюнкт называется хорновским, если максимум одна переменная входит в него без отрицания.

23. Докажите, что язык, состоящий из выполнимых КНФ формул, в которых каждый дизъюнкт либо содержит 2 литерала, либо является хорновским (содержит не более одной переменной без отрицания), является NP-полным.

24. а) Докажите, что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n - 1$ существует $a \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$ при котором $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \pmod n$. б) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.