Задание 4

$\boxed{\textbf{25.}}$ Предикат, заданный на множестве натуральных чисел ($\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) называется арифметичным, если он выражается с помощью формулы исчисления предикатов в сигнатуре $(+\times, =)$ в естественной интерпретации на множестве натуральных чисел. Докажите, что следующие предикаты являются арифметичными: а) $x < y$; б) $x = 0$; в) $x = 1$; г) $x = c$, где c — это некоторая натуральная константа; д) $a \bmod b = r$; е) a — это степень двойки; ж) a — это степень четверки.

$\boxed{\textbf{26.}}$ а) Докажите, что для любого целого k найдется сколь угодно большое b, что $b+1, 2b+1, \dots, kb+1$ — попарно взаимно простые числа. б) Докажите, что для любой последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n$ натуральных чисел можно найти такие числа a и b, что $x_i = a \bmod b(i+1)+1$. в) Докажите, что предикат: a — степень шестерки арифметичен.

$\boxed{\textbf{27.}}$ Докажите, что график вычислимой функции арифметичен.

$\boxed{\textbf{28.}}$ Покажите, что если сигнатура имеет неограниченный запас функциональных и предикатных символов любой арности, то множество тавтологий в этой сигнатуре является а) неразрешимым; б) перечислимым множеством.

---

19. Используя теорему Клини б) покажите, что существует алгоритм, который всюду применим и выдает 1 на числе, которое является квадратом его номера, а на всех остальных входах выдает ноль; в) докажите, что существуют два различных алгоритма $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что алгоритм $\mathcal{A}$ печатает $\#\mathcal{B}$, а алгоритм $\mathcal{B}$ печатает $\#\mathcal{A}$.

22. По формуле в 2-КНФ построим ориентированный граф. Вершинами графа будут множество переменных и отрицаний переменных. Для каждого дизъюнкта $(l_1 \vee l_2)$ в графе проводится два ребра из $\neg l_1$ в l_2 и из $\neg l_2$ в l_1. Докажите, что формула выполнима тогда и только тогда, когда для каждой переменной x вершины x и $\neg x$ находятся в разных компонентах сильной связности.

Определение. Дизъюнкт называется хорновским, если максимум одна переменная входит в него без отрицания.

23. Докажите, что язык, состоящий из выполнимых КНФ формул, в которых каждый дизъюнкт либо содержит 2 литерала, либо является хорновским (содержит не более одной переменной без отрицания), является NP-полным.

24. а) Докажите, что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ при котором $a^{n-1} = 1 \bmod n$, а $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \bmod n$. б) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.