Задание 7

$\boxed{\textbf{34.}}$ Пусть ZPP — это класс языков, которые принимаются вероятностной машиной Тьюринга без ошибки, математическое ожидание времени работы которых полиномиально. а) Докажите, что $L \in$ ZPP тогда и только тогда, когда существует полиномиальная по времени вероятностная машина Тьюринга M, которая выдает $\{0, 1, ?\}$, что для всех $x \in \{0,1\}^*$ с вероятностью 1, $M(x) \in \{L(x), ?\}$ и $\Pr[M(x) = ?] \le \frac{1}{2}$. б) Докажите, что ZPP = RP $\cap$ coRP.

$\boxed{\textbf{35.}}$ Докажите, что если P = NP, то существует язык из EXP, схемная сложность которого не меньше $2^n/n$.

$\boxed{\textbf{36.}}$ Докажите, что если NP $\subseteq$ BPP, то NP = RP.

$\boxed{\textbf{37.}}$ а) Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в множестве целых чисел с предикатами равенства и x делит y. б) Покажите, что предикат $y = x+2009$ не выразим в интерпретации $(\mathbb{Z}, =, x \mapsto x^2)$.

В следующих задачах требуется описать множество выразимых предикатов в данной интерпретации. Обычно требуется доказать такое утверждение: множество выразимых предикатов совпадает с множеством предикатов, выразимых бескванторными формулами. Иногда такое доказать не полу- чится, и придется добавить знак для какого-нибудь выразимого (с квантором) предиката и сказать, что выразимые — это бескванторные формулы, в которых дополнительно можно использовать новый предикат.

$\boxed{\textbf{38.}}$ $(M, =)$, где M — это произвольное бесконечное множество.

$\boxed{\textbf{39.}}$ а) $(\mathbb{Q}, =, +)$; б) $(\mathbb{Q}, =, S)$, где $S(x)$ — это прибавление единички.

$\boxed{\textbf{40.}}$ а) $(\mathbb{N}, =, S)$; б) $(\mathbb{N}, =, S, P)$, где $P(x)$ значит быть степенью двойки.

---

28. Покажите, что если сигнатура имеет неограниченный запас функциональных и предикатных символов любой арности, то множество тавтологий в этой сигнатуре является а) неразрешимым.

33. Докажите теорему об иерархии по памяти для б)недетерминированных вычислений.

37. Докажите, что если язык A сводится за полиномиальное время по Тьюрингу (оракульно) к $B \in \Sigma_i^P$, то $A \in \Sigma_{i+1}^P$.