Задачи для зачета по теории сложности

$\boxed{\textbf{1.}}$ Докажите, что а) $\mathrm{DSpace}[n^2] \subsetneq \mathrm{DSpace}[n^3]$; б) $\mathrm{NSpace}[n^2] \subsetneq \mathrm{NSpace}[n^3]$;

$\boxed{\textbf{2.}}$ Докажите, что существует язык, для которого любой алгоритм, работающий время $O(n^2)$ решает его правильно на менее, чем на половине входов какой-то длины, но этот язык распознается алгоритмом, работающим время $O(n^3)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Докажите, что $\mathrm{NTime}[n] \neq \mathrm{PSPACE}$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Докажите, что $\mathrm{DSpace}[n] \neq \mathrm{NP}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Докажите, что если $\mathrm{NP} \in \mathrm{DTime}[n^{\log n}]$, то $\mathrm{PH} \in \bigcup_{k\geq 1} \mathrm{DTime}[n^{\log^k n}]$

$\boxed{\textbf{6.}}$ Докажите, что если язык A сводится за полиномиальное время по Тьюрингу (оракульно) к $B \in \Sigma_i^P$, то $A \in \Sigma_{i+1}^P$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Приведите пример разрешимого языка в $\mathrm{P}/poly$, который не лежит в P.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Унарным назвается язык, все слова которого состоят из одного символа. Докажите, что если все унарные языки из NP лежат в P, то EXP = NEXP.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Докажите, что если унарный язык NP-полный, то P = NP.

$\boxed{\textbf{10.}}$ Покажите, что существует такой оракул A и язык $L \in NP^A$, что L не сводится по Тьюрингу к $3SAT$, даже если сведение может использовать оракул A.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Пусть ZPP — это класс языков, которые принимаются вероятностной машиной Тьюринга без ошибки, математическое ожидание времени работы которых полиномиально. а) Докажите, что $L \in$ ZPP тогда и только тогда, когда существует полиномиальная по времени вероятностная машина Тьюринга M, которая выдает $\{0, 1, ?\}$, что для всех $x \in \{0,1\}^*$ с вероятностью 1, $M(x) \in \{L(x), ?\}$ и $\Pr[M(x) = ?] \leq \frac{1}{2}$. б) Докажите, что $\mathrm{ZPP} = \mathrm{RP} \cap \mathrm{coRP}$.

$\boxed{\textbf{12.}}$ Докажите, что если $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{BPP}$, то NP = RP.

$\boxed{\textbf{13.}}$ BPL — это класс языков, для которых существует вероятностная машина Тьюринга M, которая использует логарифмическую память, останавливается при всех последовательностях случайных битов и для всех x выполняется, что $\Pr[M(x) = L(x)] \geq \frac{2}{3}$. Покажите, что $\mathrm{BPL} \subseteq \mathrm{P}$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ а) Докажите, что если $\mathrm{BPTime}[f(n)] = \mathrm{BPTime}[g(n)]$, то $\mathrm{BPTime}[f(h(n))] = \mathrm{BPTime}[g(h(n))]$, где f, g, h — конструктивные по времени, $f(n), g(n) \geq \log n$, $h(n) \geq n$ — возрастающая функция. б) Покажите, что $\mathrm{DTime}[f(n)] \subseteq \mathrm{BPTime}[f(n)] \subseteq \mathrm{DTime}[2^{f(n)}]$. в) Покажите, что $\mathrm{BPP} \subseteq \mathrm{BPTime}[n^{\log n}] \subsetneq \mathrm{BPTime}[2^n]$.

$\boxed{\textbf{15.}}$ Существует вариант класса MA с односторонней ошибкой. $L \in \mathrm{MA}_1$, если существует такая полиномиальная вероятностная машина M и полином p, что если $x \in L$, то найдется такая строка $y \in \{0,1\}^{p(n)}$, что $\Pr[M(x,y) = 1] = 1$, а если $x \notin L$, то для любой строки $y \in \{0,1\}^{p(n)}$ выполняется $\Pr[M(x,y) = 1] < \frac{1}{3}$. (В случае класса MA первое условие заменяется на такое: если $x \in L$, то найдется такая строка $y \in \{0,1\}^{p(n)}$, что $\Pr[M(x,y) = 1] \geq \frac{2}{3}$.) Покажите, что $\mathrm{MA} = \mathrm{MA}_1$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ Покажите, что $\mathrm{MA} \subseteq \Pi_2^{\mathrm{P}} \cap \Sigma_2^{\mathrm{P}}$.

$\boxed{\textbf{17.}}$ Покажите, что $\mathrm{MA} \subseteq \mathrm{AM}$.

$\boxed{\textbf{18.}}$ Покажите, что если $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{P/poly}$, то $PSPACE = AM$.

$\boxed{\textbf{19.}}$ Пусть есть оракул, который считает перманент матрицы $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$ верно для доли матриц $1 - \frac{1}{3n}$. Пусть $|\mathbb{F}| > 3n$). Докажите, что используя этот оракул можно построить вероятностный полиномиальный по времени алгоритм, который для каждой матрицы с большой вероятностью находит ее перманент.

$\boxed{\textbf{20.}}$ Докажите, что если P = NP, то существует язык из EXP, схемная сложность которого не меньше $2^n/(10n)$.

$\boxed{\textbf{21.}}$ Назовем машину Тьюринга забывчивой, если положение ее головок в каждый момент времени не зависит от входа, а зависит только от длины входа. Докажите, что для конструктивной по времени функции T любой язык из класса $\mathrm{DTime}[T(n)]$ решается на двухленточной забывчивой машине Тьюринга за время б) $O(T(n) \log T(n))$; в) Докажите, что любой язык из класса $\mathrm{NTime}[T(n)]$ сводится к SAT, причем вход длины n сводится ко входу длины $O(T(n) \log T(n))$ и сведение использует $poly(\log(n))$ памяти.

$\boxed{\textbf{22.}}$ Придумайте, как организовать на многоленточной машине Тьюринга сортировку последовательности чисел так, чтобы время ее работы была бы $O(nlogn)$, где n — длина входа.

$\boxed{\textbf{23.}}$ Докажите, что $3SAT \in \mathrm{NTime}[nlogn]$.

$\boxed{\textbf{24.}}$ Докажите, что нет алгоритма, который бы проверил, верно ли, что данная машина Тьюринга работает время $100n^2 + 200$.

$\boxed{\textbf{25.}}$ а) Докажите, что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ при котором $a^{n-1} = 1 \bmod n$, а $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \bmod n$. б) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.

$\boxed{\textbf{26.}}$ Покажите, что язык 2-SAT (выполнимых формул в 2-КНФ) лежит в классе P.

$\boxed{\textbf{27.}}$ Хорновским дизъюнктом называется дизъюнкт, в который не более одной переменной входит без отрицания. Хорновская формула в КНФ — это такая формула, все дизъюнкты которой хорновские. а) Покажите, что язык выполнимых хорновских формул в КНФ лежит в классе P; б) Покажите, что язык выполнимых формул в КНФ, у которых каждый дизъюнкт или хорновский, или состоит из двух литералов, является NP-полным.

Требования к зачету с учетом льгот:

- Дмитрий: решить 1 задачу
- Максим: решить 1 задачу
- Илья: решить 2 задачи
- Денис: решить 3 задачи с правом замены любой задачи на другую.
- Александр: решить 3 задачи