Задание 3 (на 27.09.11)

Определения. Мы называем алгоритмы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ эквивалентными если

- $\forall x\ \mathcal{A}(x)$ останавливается $\iff \mathcal{B}(x)$ останавливается;
- $\forall x$ если $\mathcal{A}(x)$ останавливается, то и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$.

Такую же эквивалентность можно ввесли на множестве натуральных чисел $a \equiv b \iff <a> \sim <b>$. Множество $S \subseteq \mathcal{N}$ называется инвариантным, если $\forall a \in S, b \in \mathbb{N} \setminus S, a \not\equiv b$.

17. (Теорема Успенского-Райса) Докажите, что если множество S инвариантно и разрешимо, то либо $S = \emptyset$, либо $S = \mathcal{N}$.

18. а) Докажите, что для любой вычислимой функции f существует всюду определенная вычислимая функция g, которая является $\equiv$-продолжением f, т.е. для всех x для которых определено $f(x)$ выполняется $f(x) \equiv g(x)$. б) (Теорема Клини о неподвижной точке) h — всюду определенная вычислимая функция. Тогда $\exists m \in \mathbb{N}$, что $m \equiv h(m)$. *Подсказка: пусть $u(n) = <n>(n)$, а $u'(n)$ — это $\equiv$-продолжение $u(n)$. Выберете m равным номеру алгоритма, который вычисляет функцию $h(u'(n))$.*

19. Используя теорему Клини а) докажите, что существует алгоритм, который на всех входах выводит свой номер; б) покажите, что существует алгоритм, который всюду применим и выдает 1 на числе, которое является квадратом его номера, а на всех остальных входах выдает ноль; в) докажите, что существуют два различных алгоритма $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что алгоритм $\mathcal{A}$ печатает $\#\mathcal{B}$, а алгоритм $\mathcal{B}$ печатает $\#\mathcal{A}$.

20. Покажите, что если P = NP, то EXP = NEXP, где $\mathrm{NEXP} = \cup_{c>0}\mathrm{NTime}[2^{n^c}]$.

21. Докажите, что нет алгоритма, который бы проверил, верно ли, что данная машина Тьюринга работает время $100n^2 + 200$.

Определение. Дизъюнкт называется хорновским, если максимум одна переменная входит в него без отрицания.

22. Докажите, что язык, состоящий из выполнимых КНФ формул, в которых каждый дизъюнкт либо содержит 2 литерала, либо является хорновским (содержит не более одной переменной без отрицания), является NP-полным.

23. а) Докажите, что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ при котором $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \bmod n$. б) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.

С прошлого раза остались задачи 8 и 13.