Задание 4 (на 04.10.11)

$\boxed{\textbf{24.}}$ Предикат, заданный на множестве натуральных чисел ($\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) называется арифметичным, если он выражается с помощью формулы исчисления предикатов в сигнатуре $(+, \times, =)$ в естественной интерпретации на множестве натуральных чисел. Докажите, что следующие предикаты являются арифметичными: а) $x < y$; б) $x = 0$; в) $x = 1$; г) $x = c$, где c — это некоторая натуральная константа; д) $a \bmod b = r$; е) a — это степень двойки; ж) a — это степень четверки.

$\boxed{\textbf{25.}}$ а) Докажите, что для любого целого k найдется сколь угодно большое b, что $b+1, 2b+1, \dots, kb+1$ — попарно взаимно простые числа. б) Докажите, что для любой последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n$ натуральных чисел можно найти такие числа a и b, что $x_i = a \bmod b(i+1)+1$. в) Докажите, что предикат: a — степень шестерки арифметичен.

$\boxed{\textbf{26.}}$ Докажите, что график вычислимой функции арифметичен.

$\boxed{\textbf{27.}}$ Покажите, что если сигнатура имеет неограниченный запас функциональных и предикатных символов любой арности, то множество тавтологий в этой сигнатуре является а) неразрешимым; б) перечислимым множеством.

---

8. Покажите, что каждый язык, который принимается k-ленточной недетерминированной машиной Тьюринга за время $f(n)$ может быть принят 2-ленточной недетерминорованной машиной за время $O(f(n))$, где f — конструктивная по времени функция. *Указание: подсказка должна содержать информацию о всем вычислении, придумайте, как сделать так, чтобы подсказка была длины $O(f(n))$ и ее можно было бы проверить за время $O(f(n))$.*

13. Покажите, что существует всюду определенная вычислимая функция $a(n)$, принимающая рациональные значения, что существует предел $\lim_{n\to\infty} a(n) = \alpha \in \mathbb{R}$, но не существует алгоритма, который бы по рациональному числу ϵ выдал такой n_0, что при $n > n_0$ выполняется $|a(n) - \alpha| < \epsilon$.

18. Используя теорему Клини б) покажите, что существует алгоритм, который всюду применим и выдает 1 на числе, которое является квадратом его номера, а на всех остальных входах выдает ноль; в) докажите, что существуют два различных алгоритма $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что алгоритм $\mathcal{A}$ печатает $\#\mathcal{B}$, а алгоритм $\mathcal{B}$ печатает $\#\mathcal{A}$.

21. Докажите, что нет алгоритма, который бы проверил, верно ли, что данная машина Тьюринга работает время $100n^2 + 200$.

23. а) Докажите, что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ при котором $a^{n-1} = 1 \bmod n$, а $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \bmod n$. б) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.