Задание 5

Определение. $\Sigma_0 = \Pi_0$ — множество разрешимых предикатов на множестве натуральных чисел. Σ_{k+1} — это множество предикатов, которые представляются в виде $\exists y P(x,y)$, где $P \in \Pi_k$, а предикаты из Π_{k+1} представляются в виде $\forall y P(x,y)$, где $P \in \Sigma_k$. Последовательность Σ_k (и Π_k) называется арифметической иерархией.

$\boxed{\textbf{29.}}$ а) Покажите, что Σ_1 — это множество перичислимых предикатов, а Π_1 — коперечислимых.

б) Покажите, что $Q \in \Sigma_k$ тогда и только тогда, когда Q можно представить в виде: $Q(x) = \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где P — разрешимый предикат. (соответственно $Q \in \Pi_k \iff Q(x) = \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots P(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$).

в) Покажите, что $\Sigma_k \cup \Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$.

г) Покажите, что каждый арифметичный предикат содержится в Σ_k для некоторого k.

д) Покажите, что все предикаты из Σ_k являются арифметичными.

Определение. Множество A m-сводится к множеству B, если существует такая вычислимая всюду определенная функция f, что $x \in A \iff f(x) \in B$. Обозначение: $A \leq_m B$.

$\boxed{\textbf{30.}}$ а) $A \leq_m B$, B — разрешимо, докажите, что A — разрешимо.

б) $A \leq_m B$, B — перечислимо, докажите, что A — перечислимо.

в) Докажите, что $A \leq_m B \iff \mathbb{N} \setminus A \leq_m \mathbb{N} \setminus B$.

г) $A \leq_m B$, $B \in \Sigma_k$ докажите, что $A \in \Sigma_k$.

$\boxed{\textbf{31.}}$ а) Докажите, что существует универсальное перечислимое множество. Т.е. такое перечислимое множество пар U, что для любого перечислимого множества A найдется элемент a, что $A = \{x \mid (a,x) \in U\}$.

б) Докажите, что для всех $k \geq 1$ существует универсальное множество в Σ_k и Π_k.

в) Докажите, что универсальное множество для Σ_k не содержится в Π_k.

г) Докажите, что $\Sigma_k \subsetneq \Sigma_{k+1}$.

$\boxed{\textbf{32.}}$ Пусть T — это множество номеров замкнутых формул в сигнатуре $\{+, \times, =\}$, которые истинны в естественной интерпретации на множестве натуральных чисел.

а) Докажите, что для любого $P \in \Sigma_k$ выполняется $P \leq_m T$.

б) (Теорема Тарского) Докажите, что T не является арифметичным.

в) (Теорема Геделя о неполноте) Покажите, что T не является перечислимым.

---

13. Покажите, что существует всюду определенная вычислимая функция $a(n)$, принимающая рациональные значения, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a(n) = \alpha \in \mathbb{R}$, но не существует алгоритма, который бы по рациональному числу ϵ выдал такой n_0, что при $n > n_0$ выполняется $|a(n) - \alpha| < \epsilon$.

21. Докажите, что нет алгоритма, который бы проверил, верно ли, что данная машина Тьюринга работает время $100n^2 + 200$.

23. а) Докажите, что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ при котором $a^{n-1} = 1 \bmod n$, а $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \bmod n$. б) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.

27. Покажите, что если сигнатура имеет неограниченный запас функциональных и предикатных символов любой арности, то множество тавтологий в этой сигнатуре является а) неразрешимым множеством.