Задание 4 (на 09.10.12)

CC24. Выведите теорему Успенского–Райса из теоремы о неподвижной точке.

Вычислимая функция $U(n,x)$ называется универсальной вычислимой функции для вычислимых функций одного аргумента, если для любой другой вычислимой функции f найдется такое число m, что $f(x) = U(m,x)$.

Но не все универсальные вычислимые функции задают то, что мы понимаем под языками программирования. Требуется более сильное свойство. Вычислимая функция $U(n,x)$ называется главной нумерацией, если для любой вычислимой функции $V(n,x)$ найдется всюду определенная вычислимая функция s, что $V(n,x) = U(s(n),x)$.

CC25. а) Покажите, что функция $U(n,x) = <n>(x)$ является главной нумерацией. б) Покажите, что если теорема о неподвижной точке верна в одной главной нумерации, то она верна и в любой другой.

CC26. Предикат, заданный на множестве натуральных чисел ($\mathcal{N} = \{0,1,2,\dots\}$) называется арифметичным, если он выражается с помощью формулы исчисления предикатов в сигнатуре $(+\times,=)$ в естественной интерпретации на множестве натуральных чисел. Докажите, что следующие предикаты являются арифметичными: а) $x < y$; б) $x = 0$; в) $x = 1$; г) $x = c$, где c — это некоторая натуральная константа; д) $a \bmod b = r$; е) a — это степень двойки; ж) a — это степень четверки.

CC27. а) Докажите, что для любого целого k найдется сколь угодно большое b, что $b+1, 2b+1, \dots, kb+1$ — попарно взаимно простые числа. б) Докажите, что для любой последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n$ натуральных чисел можно найти такие числа a и b, что $x_i = a \bmod b(i+1)+1$. в) Докажите, что предикат: a — степень шестерки арифметичен.

CC28. Докажите, что любой перечислимый предикат арифметичен.

CC29. Покажите, что язык, состоящий из выполнимых формул в КНФ, в которых каждый дизъюнкт является либо хорновским, либо состоит из двух литералов, является NP-трудным.

CC9. Покажите, что каждый язык, который принимается k-ленточной недетерминированной машиной Тьюринга за время $f(n)$ может быть принят 2-ленточной недетерминорованной машиной за время $O(f(n))$.

CC23. Покажите, что язык простых чисел содержится в классе а) co-NP; б) а) Докажите, что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n-1$ существует $a \in \{2,3,\dots,n-1\}$ при котором $a^{n-1} = 1 \bmod n$ и $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \bmod n$. в) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.