Задание 2 (на 18.09.13)

CC10. Приведите пример неразрешимого подмножества $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$, такого что все его горизонтальные и вертикальные сечения (т.е. пересечения с $N \times \{x\}$ и с $\{x\} \times N$) разрешимы.

CC11. Постройте пример двух перечислимых множеств, которые нельзя отделить никаким разрешимым (это значит, что не существует такого разрешимого множества, которое содержало бы первое перечислимое множество и не пересекалось бы со вторым).

CC12. а) Докажите, что существует *универсальное* перечислимое множество, т.е. такое перечислимое подмножество $U \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, что для любого перечислимого подмножества $A \subseteq \mathcal{N}$ найдется такое $a \in \mathcal{N}$, что $A = \{x|(a,x) \in U\}$. б) Покажите, что универсального разрешимого множества не существует.

CC13. Покажите, что существует всюду определенная вычислимая функция $a(n)$, принимающая рациональные значе- ния, что существует предел $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a(n) \in \mathbb{R}$, но не существует алгоритма, который бы по рациональному числу ϵ выдал такой n_0, что при $n > n_0$ выполняется $|a(n) - \alpha| < \epsilon$.

Определения. Мы называем алгоритмы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ эквивалентными если

- $\forall x$ $\mathcal{A}(x)$ останавливается $\iff$ $\mathcal{B}(x)$ останавливается;
- $\forall x$ если $\mathcal{A}(x)$ останавливается, то и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{B}(x)$.

Такую же эквивалентность можно ввесли на множестве натуральных чисел $a \equiv b \iff <a> \sim <b>$. Множество $S \subseteq \mathcal{N}$ называется инвариантным, если $\forall a \in S, b \in \mathbb{N} \setminus S, a \not\equiv b$.

CC14. (Теорема Успенского-Райса) Докажите, что если множество S инвариантно и разрешимо, то либо $S = \emptyset$, либо $S = \mathcal{N}$.

CC15. Покажите, что множество описаний машин Тьюринга, которые останавливаются на всех входах, является неперечислимым множеством и дополнение его тоже неперечислимо.

CC16. Покажите, что язык 2-SAT (выполнимых формул в 2-КНФ) лежит в классе P.

CC17. Хорновской формулой называется формула в ДНФ, в которой в каждый конъюнкт максимум одна переменная входит с отрицанием. Покажите, что множество хорновских тавтологий в ДНФ содержится в классе P

CC 9. Машина Тьюринга называется забывчивой, если положение головки в любой момент времени зависит только от длины входа. а) Докажите, что любую машину Тьюринга, работающую время $T(n)$ можно промоделировать за время $O(T^2(n))$ на забывчивой одноленточной машине. б) А на забывчивой двухленточной за время $O(T(n)\log T(n))$.