Задание 3 (на 25.09.13)

CC18. а) Докажите, что для любой вычислимой функции f существует всюду определенная вычислимая функция g, которая является $\equiv$-продолжением f, т.е. для всех x для которых определено $f(x)$ выполняется $f(x) \equiv g(x)$.

б) (Теорема Клини о неподвижной точке) h — всюду определенная вычислимая функция. Тогда $\exists m \in \mathbb{N}$, что $m \equiv h(m)$. *Подсказка: пусть $u(n) = <n>(n)$, а $u'(n)$ — это $\equiv$-продолжение $u(n)$. Пусть $t(n) = h(u'(n))$, выберете $m = u'(\sharp t)$.*

CC19. Используя теорему Клини а) докажите, что существует алгоритм, который на всех входах выводит свой номер; б) покажите, что существует алгоритм, который всюду применим и выдает 1 на числе, которое является квадратом его номера, а на всех остальных входах выдает ноль; в) докажите, что существуют два различных алгоритма $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что алгоритм $\mathcal{A}$ печатает $\#\mathcal{B}$, а алгоритм $\mathcal{B}$ печатает $\#\mathcal{A}$.

CC20. Предикат, заданный на множестве натуральных чисел ($\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$) называется арифметичным, если он выражается с помощью формулы исчисления предикатов в сигнатуре $(+\times, =)$ в естественной интерпретации на множестве натуральных чисел. Докажите, что следующие предикаты являются арифметичными: а) $x < y$; б) $x = 0$; в) $x = 1$; г) $x = c$, где c — это некоторая натуральная константа; д) $a \bmod b = r$; е) a — это степень двойки; ж) a — это степень четверки.

CC21. а) Докажите, что для любого целого k найдется сколь угодно большое b, что $b + 1, 2b + 1, \dots, kb + 1$ — попарно взаимно простые числа. б) Докажите, что для любой последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n$ натуральных чисел можно найти такие числа a и b, что $x_i = a \bmod b(i + 1) + 1$. в) Докажите, что предикат: a — степень шестерки арифметичен.

CC22. Покажите, что если P = NP, то EXP = NEXP.

CC23. Покажите, что каждый язык, который принимается k-ленточной недетерминированной машиной Тьюринга за время $f(n)$ может быть принят 2-ленточной недетерминорованной машиной за время $O(f(n))$.

CC 9. Машина Тьюринга называется забывчивой, если положение головки в любой момент времени зависит только от длины входа. а) Докажите, что любую машину Тьюринга, работающую время $T(n)$ можно промоделировать за время $O(T^2(n))$ на забывчивой одноленточной машине. б) А на забывчивой двухленточной за время $O(T(n) \log T(n))$.

CC 16. Покажите, что язык 2-SAT (выполнимых формул в 2-КНФ) лежит в классе P.

CC 17. Хорновской формулой называется формула в ДНФ, в которой в каждый конъюнкт максимум одна переменная входит с отрицанием. Покажите, что множество хорновских тавтологий в ДНФ содержится в классе P