Задание 4 (на 02.10.13)

CC24. Выведите теорему Успенского–Райса из теоремы о неподвижной точке.

Определение. Вычислимая функция $U(n, x)$ называется универсальной вычислимой функции для вычислимых функций одного аргумента, если для любой другой вычислимой функции f найдется такое число m, что $f(x) = U(m, x)$.

Но не все универсальные вычислимые функции задают то, что мы понимаем под языками программирования. Требуется более сильное свойство. Вычислимая функция $U(n, x)$ называется главной нумерацией, если для любой вычислимой функции $V(n, x)$ найдется всюду определенная вычислимая функция s, что $V(n, x) = U(s(n), x)$.

CC25. а) Покажите, что функция $U(n, x) = {<}n{>}(x)$ является главной нумерацией. б) Покажите, что если теорема о неподвижной точке верна в одной главной нумерации, то она верна и в любой другой.

CC26. Докажите, что любой перечислимый предикат арифметичен.

Определение. Ассоциативным исчислением называется конечный набор правил вида $\{s_i \to t_i\}_{i\in I}$, где s_i, t_i — строчки. Говорят, что строка y выводится из строки x, если из строки x можно получить строку y, заменяя несколько раз подстроку s_i на t_i. Ассоциативное исчисление называется двусторонним, если наряду с правилом $s \to t$ есть и правило $t \to s$.

CC27. Покажите, что существует такое а) обыкновенное б) двустороннее ассоциативное исчисление, для которого вопрос о выводимости строки x из строки y является алгоритмически неразрешимым.

CC28. а) Покажите, что для любой конечной (или перечислимой) сигнатуры множество тавтологий в этой сигнатуре перечислимо. б) Покажите, что если в сигнатуре есть достаточное количество функциональных и предикатных символов арности 1 и 2, то множество тавтологий в этой сигнатуре неразрешимо.

CC29. Покажите, что язык, состоящий из выполнимых формул в КНФ, в которых каждый дизъюнкт является либо хорновским (дизъюнкт называется хорновским, если не более одной переменной входит в него без отрицания), либо состоит из двух литералов, является NP-полным.

CC 9. Машина Тьюринга называется забывчивой, если положение головки в любой момент времени зависит только от длины входа. а) Докажите, что любую машину Тьюринга, работающую время $T(n)$ можно промоделировать за время $O(T^2(n))$ на забывчивой одноленточной машине. б) А на забывчивой двухленточной за время $O(T(n)\log T(n))$.

CC 19. Используя теорему Клини а) докажите, что существует алгоритм, который на всех входах выводит свой номер; б) покажите, что существует алгоритм, который всюду применим и выдает 1 на числе, которое является квадратом его номера, а на всех остальных входах выдает ноль; в) докажите, что существуют два различных алгоритма $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, что алгоритм $\mathcal{A}$ печатает $\#\mathcal{B}$, а алгоритм $\mathcal{B}$ печатает $\#\mathcal{A}$.

CC 22. Покажите, что если P = NP, то EXP = NEXP.

CC 23. Покажите, что каждый язык, который принимается k-ленточной недетерминированной машиной Тьюринга за время $f(n)$ может быть принят 2-ленточной недетерминорованной машиной за время $O(f(n))$.