## Задание 5 (на 10.10.13)

**Определение.** $\Sigma_0 = \Pi_0$ — множество разрешимых предикатов на множестве натуральных чисел. $\Sigma_{k+1}$ — это множество предикатов, которые представляются в виде $\exists y P(x, y)$, где $P \in \Pi_k$, а предикаты из $\Pi_{k+1}$ представляются в виде $\forall y P(x, y)$, где $P \in \Sigma_k$. Последовательность $\Sigma_k$ (и $\Pi_k$) называется арифметической иерархией.

**CC30.** а) Покажите, что $\Sigma_1$ — это множество перичислимых предикатов, а $\Pi_1$ — коперечислимых.

б) Покажите, что $Q \in \Sigma_k$ тогда и только тогда, когда $Q$ можно представить в виде: $Q(x) = \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots P(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, где $P$ — разрешимый предикат. (соответственно $Q \in \Pi_k \iff Q(x) = \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots P(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$).

в) Покажите, что $\Sigma_k \cup \Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$.

г) Покажите, что каждый арифметичный предикат содержится в $\Sigma_k$ для некоторого $k$.

д) Покажите, что все предикаты из $\Sigma_k$ являются арифметичными.

**Определение.** Множество $A$ $m$-сводится к множеству $B$, если существует такая вычислимая всюду определенная функция $f$, что $x \in A \iff f(x) \in B$. Обозначение: $A \leq_m B$.

**CC31.** а) $A \leq_m B$, $B$ — разрешимо, докажите, что $A$ — разрешимо.

б) $A \leq_m B$, $B$ — перечислимо, докажите, что $A$ — перечислимо.

в) Докажите, что $A \leq_m B \iff \mathbb{N} \setminus A \leq_m \mathbb{N} \setminus B$.

г) $A \leq_m B$, $B \in \Sigma_k$ докажите, что $A \in \Sigma_k$.

**CC32.** а) Докажите, что существует универсальное перечислимое множество. Т.е. такое перечислимое множество пар $U$, что для любого перечислимого множества $A$ найдется элемент $a$, что $A = \{x \mid (a, x) \in U\}$.

б) Докажите, что для всех $k \geq 1$ существует универсальное множество в $\Sigma_k$ и $\Pi_k$.

в) Докажите, что универсальное множество для $\Sigma_k$ не содержится в $\Pi_k$.

г) Докажите, что $\Sigma_k \subsetneq \Sigma_{k+1}$.

**CC33.** Пусть $T$ — это множество номеров замкнутых формул в сигнатуре $\{+, \times, =\}$, которые истинны в естественной интерпретации на множестве натуральных чисел.

а) Докажите, что для любого $P \in \Sigma_k$ выполняется $P \leq_m T$.

б) (Теорема Тарского) Докажите, что $T$ не является арифметичным.

в) (Теорема Геделя о неполноте) Покажите, что $T$ не является перечислимым.

**CC34.** Докажите, что а) $\mathrm{DSpace}[n^2] \subsetneq \mathrm{DSpace}[n^3]$; б) $\mathrm{NSpace}[n^2] \subsetneq \mathrm{NSpace}[n^3]$.

**CC35.** Покажите, что язык простых чисел содержится в классе а) co-NP; б) (Критерий Пратта) Докажите, что число $n$ простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя $q$ числа $n-1$ существует $a \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ при котором $a^{n-1} = 1 \bmod n$ и $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \bmod n$. в) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.

---

**CC 9.** Машина Тьюринга называется забывчивой, если положение головки в любой момент времени зависит только от длины входа. Докажите, что любую машину Тьюринга, работающую время $T(n)$ можно промоделировать за время $O(T^2(n))$ на забывчивой одноленточной машине. б) А на забывчивой двухленточной за время $O(T(n) \log T(n))$.

**CC 23.** Покажите, что каждый язык, который принимается $k$-ленточной недетерминированной машиной Тьюринга за время $f(n)$ может быть принят 2-ленточной недетерминорованной машиной за время $O(f(n))$.

**CC 28.** б) Покажите, что если в сигнатуре есть достаточное количество функциональных и предикатных символов арности 1 и 2, то множество тавтологий в этой сигнатуре неразрешимо.

**CC 29.** Покажите, что язык, состоящий из выполнимых формул в КНФ, в которых каждый дизъюнкт является либо хорновским (дизъюнкт называется хорновским, если не более одной переменной входит в него без отрицания), либо состоит из двух литералов, является NP-полным.