

### Листок 1. Индукция

- 1.** Докажите равенства а)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ; б)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1/2)(n+1)}{3}$ ; в)  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ;
- 2.** Докажите неравенство Бернулли:  $(1+x)^n \geq 1+nx$  для всех натуральных  $n$  и вещественных  $x \geq -1$ .
- 3.** Есть гири весом  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ . Докажите, что любой груз в промежутке от 1 до  $2^n - 1$  можно уравновесить единственным образом.
- 4.** (Коды Грея) Докажите, что все бинарные строки длины  $n$  (т.е. множество  $\{0, 1\}^n$ ) можно выписать подряд, так что каждая следующая строка отличается от предыдущей ровно в одном символе.
- 5.** а) На плоскости нарисовано несколько окружностей, докажите, что области, на которые эти окружности разбивают плоскость можно покрасить в черный и белые цвета в шахматном порядке.  
б) Дано изображение плоского Эйлера графа (степени всех вершин четны, ребра не пересекаются). Докажите, что грани этого изображения можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке (соседние по ребру грани покрашены в разные цвета).
- 6.** В неориентированном графе  $2n$  вершин и нет треугольников (циклов длины 3). Докажите, что число ребер в нем не превосходит  $n^2$ , причем оценка  $n^2$  достигается.
- 7.** Дана однородная линейная система от  $n$  переменных (т.е. система, состоящая из уравнений вида  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ ), в которой меньше, чем  $n$  уравнений. Докажите, что система имеет ненулевое решение.
- 8.** Докажите неравенство  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ .
- 9.** В группе есть несколько студентов, для них было прочитано  $n$  лекций. Известно, что для каждой  $k$  лекций найдется хотя бы  $k$  студентов, которые посетили хотя бы одну из этих лекций. Докажите, что для каждой лекции можно выделить по одному студенту, который посетил эту лекцию, а для разных лекций выделенные студенты были бы разными.