**Листок 10. Вероятностный метод.**

$\boxed{\textbf{1.}}$ В классе учатся $n$ мальчиков и $n$ девочек, каждому мальчику нравится несколько девочек из класса (возможно, что двум мальчикам нравится одна и та же девочка). Злая учительница рассадила детей за парты мальчик-девочка случайным образом (все варианты рассадки равновероятны). Чему равняется математическое ожидание числа мальчиков, которые сидят с нравившейся ему девочкой за одной партой?

$\boxed{\textbf{2.}}$ каждый из $k$ человек в лифте, который стоит на первом этаже выбирает случайный этаж равновероятно из оставшихся $n$ этажей. Чему равняется математическое ожидание числа остановок, которые сделает лифт?

$\boxed{\textbf{3.}}$ Покажите, что существует такая формула $\phi$ в 3-КНФ, в каждом дизъюнкте которой входят ровно три различных переменных, для которой не существует набора, который выполнит больше, чем $\frac{7}{8}m$ дизъюнктов, где $m$ — это число дизъюнктов в $\phi$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из $m$ дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

$\boxed{\textbf{5.}}$ а) Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь. б) Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл (простой цикл, проходящий по всем вершинам).

$\boxed{\textbf{6.}}$ В лотерее на выигрыши уходит 40% стоимости билетов. Билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть хотя бы 5000 рублей не более 1%.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Докажите, что элементы множества $[n]$ можно покрасить в два цвета так, чтобы ни одна арифметическая прогрессия длины $\lceil 2\log n\rceil$ не была покрашена в один цвет.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе $G$ минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в $G$ есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

---

**5.6** На множестве $\mathcal{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где $S$ — это функция прибавления 1, $N$ — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.

**8.8** В связном графе есть остовное дерево, в котором $k$ висячих вершин и есть остовное дерево, в котором $m$ висячих вершин. Докажите, что для любого числа $\ell$ между $k$ и $m$ в этом графе найдется остовное дерево, в котором $\ell$ висячих вершин.

**9.10** В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.