Листок 11. Еще чуть-чуть вероятностей

$\boxed{\textbf{1.}}$ Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы

- Покажите, что для любых $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ события $[X_i \in A_i]$ являются независимыми.
- Покажите, что для любых функций $f_1, f_2, \ldots f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f(X_i)$ являются независимыми.
- Пусть $I \subseteq [n]$, докажите, что случайные величины $\{X_i\}_{i \in I}$ являются независимыми.
- Пусть $I \subseteq [n]$, докажите, что для любых функций $f : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^{[n]\setminus J} \to \mathbb{R}$ случайные величины $f((X_i)_{i\in I})$ и $g((X_i)_{i\in[n]\setminus I})$ независимы.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n + m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x, r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x, r)] \geq 1-2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0, 1\}^{m'}$ с равными вероятностями. б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0, 1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Вася побывал в опасном месте, где он мог с вероятностью 0.8 заболеть. Вася прошел обследование в двух клиниках, известно, что первая клиника выявляет заболевание (если оно есть) с вероятностью 0.5 (и не выявляет, если заболевания нет), а вторая клиника выявляет заболевание с вероятностью 0.75. Клиники работают независимо друг от друга. С какой вероятностью Вася заболел, если ни одна из клиник заболевание не обнаружила?

$\boxed{\textbf{4.}}$ Покажите, что для любой случайной величины X выполняется неравенство: $\mathsf{P}[X = 0] \leq \frac{\mathrm{D}[x]}{\mathrm{E}[X]^2}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Коды Уолша-Адамара. а) Каждому $a \in \{0, 1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, определяемая так: $f_a(x_1x_2 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^n a_ix_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0, 1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $WH(a)$, нетрудно понять, что длина строки $WH(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0, 1\}^n$ их коды $WH(a)$ и $WH(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $WH(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0, 1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0, 1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

5.6 На множестве $\mathcal{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.

8.8 В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

9.10 В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

10.4 Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.