Листок 12. Линейное программирование

$\boxed{1.}$ Дана система из n линейных уравнений. Докажите, что система несовместна тогда и только тогда, когда линейными комбинациями из этих уравнений можно получить $0 = 1$. (В решении нельзя без доказательства пользоваться теоремами линейной алгебры, если вы их еще не изучали в Академическом университете.)

$\boxed{2.}$ Приведите пример задачи линейного программирования, которая имеет оптимальное решение, а у двойственной задачи множество допустимых решений пусто. Или докажите, что такого примера не существует.

$\boxed{3.}$ Полиэдром называется множество точек $\mathbb{R}^{\ltimes}$, которое задается системой нестрогих линейных неравенств от n переменных. а) Докажите, что полиэдр выпуклое множество, т.е. вместе с любыми двумя точками $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ он содержит отрезок между ними, т.е. множество точек $\{(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2, \dots, \lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \mid \lambda \in [0,1]\}$. б) Покажите, что если задача линейного программирования имеет два оптимальных решения, то она имеет бесконечно много оптимальных решений.

$\boxed{4.}$ Дан квадрат $n \times n$, в клетках которого стоят вещественные числа. Докажите, что либо можно подобрать такие n неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ (не все они равны нулю), что в каждом столбце сумма первого числа умноженного на α_1, второго числа, умноженного на α_2,…, n-го числа, умноженного на α_n неотрицательна, либо можно подобрать такие n неотрицательных чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}_+$ (не все они равны нулю), что в каждом столбце сумма первого числа умноженного на β_1, второго числа, умноженного на β_2,…, n-го числа, умноженного на β_n неположительна.

8.8 В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

9.10 В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

10.4 Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

Подсказка: надо выбирать значения переменных случайным образом, причем необязательно равновероятно. Для переменных, которые входят в дизъюнкты из одного литерала, надо выбирать с большей вероятностью значение, которое выполнит этот дизъюнкт.

11.2б Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n + m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями. б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.

Подсказка: С помощью вероятностного метода и пункта а) доказать, что найдется такая строка случайных битов, с которой схема будет верно вычислять функцию f на всех входах.

11.5 Пусть $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества в графе G (независимое множество — это такое множество вершин, что ребер между ними нет). В графе n вершин и $\frac{dn}{2}$ ребер. Докажите, что $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$.

Подсказка: Рассмотрите случайное множество вершин, в котором каждая вершина выбирается с вероятностью p. После этого из этого множества нужно выкинуть по одной вершине для каждого ребра. Посчитайте математическое ожидание числа оставшихся вершин.

11.6б Коды Уолша-Адамара. а) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $WH(a)$, нетрудно понять, что длина строки $WH(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $WH(a)$ и $WH(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $WH(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

Подсказка: Z — это строка длины 2^n, будем считать, что Z — это таблица значений некоторой функции $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Покажите, что для каждого x и $g(r) + g(x+r) = f_a(x)$ с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2} + 2\epsilon$, если r выбирается случайно и равновероятно из множества строк длины $\{0,1\}^n$.