Листок 14. Последний.

$\boxed{\textbf{1.}}$ В шеренгу стоит $mn+1$ человек. Докажите, что найдется либо $m+1$ человек, стоящие по росту справа налево, либо $n+1$ человек, стоящие по росту слева направо.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Пусть $S \subseteq \mathbb{N}$ — конечное множество. Известно, что среди любых n из них можно выбрать два, что одно из них делится на другое. Докажите, что все числа множества S можно покрасить в $n-1$ цвет так, чтобы из любых двух чисел одного цвета, одно из них делилось бы на другое.

$\boxed{\textbf{3.}}$ На прямой отмечено произвольное множество отрезков. Пусть M — наименьшее количество точек на прямой, что каждый из отмеченных отрезков содержит хотя бы одну из этих точек; а m — наибольшее количество попарно непересекающихся отрезков, которые можно выбрать из отмеченных отрезков. Докажите, что $M = m$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ В комнате находятся n мудрецов. На каждом мудреце находится колпак черного или белого цвета. Колпак выдаются случайным образом независимо друг от друга. Каждый мудрец может видеть колпак всех остальных мудрецов, но не может видеть свою. Каждого мудреца спрашивают, не хочет ли он попробовать угадать цвет своей шляпы. Мудрец может попробовать или отказаться. Каждый мудрец делает выбор, не зная ответы остальных людей. Выигрывают или проигрывают мудрецы вместе. Они выигрывают, если все, кто решил отвечать отвечают верно, и хотя бы один мудрец отвечает. Во всех других случаях люди проигрывают. Стратегия в игре — это набор функций для каждого мудреца, по которым они решают, что отвечать в зависимости по цветам колпаков остальных игроков.

а) Назовем граф G ориентированным подграфом n-мерного гиперкуба, если его вершины соответствуют бинарным строкам длины n и если существует ребро $u \to v$, то строки u, v различаются не более, чем в одном бите. Пусть $K(G)$ — количество вершин в графе G со входящей степенью не менее 1 и исходящей 0. Покажите, что максимальная вероятность победы в игре (по всем стратегиям) равна максимуму по выборам подграфа n-мерного гиперкуба величины $K(G)/2^n$.

б) Используя факт, что исходящая степень вершин не превосходит n, покажите, что $K(G)/2^n \le \frac{n}{n+1}$ для любого графа G подграфа n-мерного гиперкуба.

в) Покажите, что если $n = 2^l - 1$, то существует граф G, для которого $K(G)/2^n = \frac{n}{n+1}$. (Подсказка: используйте коды Хемминга).

$\boxed{\textbf{5.}}$ Докажите, что среди любых а) 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых, а из любых 10 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых. б) Покажите, что из 9 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых. в) Докажите, что из любых 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

Старые задачи

8.8 В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

9.10 В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

10.4 Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

Подсказка: надо выбирать значения переменных случайным образом, причем необязательно равновероятно. Для переменных, которые входят в дизъюнкты из одного литерала, надо выбирать с большей вероятностью значение, которое выполнит этот дизъюнкт.

11.2б Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \ge \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой. а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n+m'$ входами, размер которой

полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями. б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.
Подсказка: С помощью вероятностного метода и пункта а) доказать, что найдется такая строка случайных битов, с которой схема будет верно вычислять функцию f на всех входах.
11.6б Коды Уолша-Адамара. а) Каждому $a \in \{0,1\}^n$ соответствует линейная функция $f_a : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, определяемая так: $f_a(x_1x_2\dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_ix_i \bmod 2$. Кодом Уолша-Адамара строки $a \in \{0,1\}^n$ называется таблица значений функции f_a и обозначается $WH(a)$, нетрудно понять, что длина строки $WH(a)$ равняется 2^n. Проверьте, что для двух различных строк $a, b \in \{0,1\}^n$ их коды $WH(a)$ и $WH(b)$ отличаются ровно в половине позиций.

б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $WH(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.
Подсказка: Z — это строка длины 2^n, будем считать, что Z — это таблица значений некоторой функции $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Покажите, что для каждого x и $g(r) + g(x+r) = f_a(x)$ с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2} + 2\epsilon$, если r выбирается случайно и равновероятно из множества строк длины $\{0,1\}^n$.
12.2 Приведите пример задачи линейного программирования, которая имеет оптимальное решение, а у двойственной задачи множество допустимых решений пусто. Или докажите, что такого примера не существует.