Листок 2. Пропозициональные формулы

$\boxed{\textbf{1.}}$ а) Булева функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ называется монотонной, если при $x \le y$ выполняется $f(x) \le f(y)$ ($x \le y$, если для всех $1 \le i \le n$ выполняется $x_i \le y_i$). Докажите, что если пропозициональная формула использует только связки $\vee$ и $\wedge$, то задаваемая ей булева функция монотонна. б) Докажите, что монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки $\vee$ и $\wedge$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, используя только одну бинарную связку: стрелку Пирса $\downarrow$: результат $a \downarrow b$ совпадает с $\neg(a \vee b)$ или штрих Шеффера $\uparrow$: результат $a \uparrow b$ совпадает с $\neg(a \wedge b)$. Покажите, что других таких бинарных связок нет.

Определение. Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. Булева функция называется линейной, если она имеет вид $f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \bmod 2$, где $a_i \in \{0,1\}$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ (Теорема Поста) Пусть есть набор булевых функций, среди которых есть не монотоная, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1, \dots, 1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что с помощью композиций этих функций можно получить а) отрицание, константу 1, константу 0; б) любую булеву функцию. в) Докажите, что если набор булевых функций не удовлетворяет условию теоремы Поста, то через композицию этих функций нельзя выразить все булевы функции.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Пусть формула $\phi \to \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ, которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Приведите пример булевой функции от n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены (дизъюнкты или конъюнкты) длины n.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.

$\boxed{\textbf{7.}}$ С Марса доставили устройство, которое мгновенно по формуле в КНФ выдает ее набор значений переменных, который выполняет эту формулу, если такой набор существует. Покажите, как с помощью этого устройства раскладывать составные числа на произведение двух сомножителей, больших 1, за полиномиальное время от размера исходного числа.