Листок 3. Пропозициональные формулы - 2

Определение. Рассмотрим пропозициональные формулы, которые используют константу 1, конъюнкцию $\wedge$ и сумму по модулю два $\oplus$ (приоритет $\wedge$ выше, чем $\oplus$). Мономом будем называть константу 1 и конъюнкцию нескольких переменных. Многочленом Жегалкина называется формула вида $m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k$, где m_i — различные мономы, $k \geq 0$. Пример: $x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1$.

1. а) Представьте в виде многочлена Жегалкина $\vee$, $\wedge$ и $\neg$; б) Докажите, что любая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина. в) Докажите, что такое представление единственное с точностью до перестановки мономов.

2. Докажите, что у каждой невыполнимой формулы в КНФ, использующей n переменных, есть резолюционное опровержение, состоящие из не более, чем $2^{n+1} - 1$ дизъюнктов.

3. В каждую клетку квадрата $n \times n$ поставим свою пропозициональную переменную, затем для каждой клетки, в которой стоит переменная x запишим дизъюнкт $(\neg x \vee u(x) \vee r(x))$, где $u(x)$ — это переменная, которая находится в верхней соседней клетке для x, а $r(x)$ — это перемененая — правый сосед x (если верхнего соседа нет, то $u(x) = 0$, а если правого нет, то $r(x) = 0$). Пусть a — переменная, которая стоит в левой нижней клетке, допишем еще дизъюнкт (a). Покажите, что конъюнкция выписанных дизъюнктов — невыполнимая формула и для нее сущетсвует резолюционное опровержение длины $O(n^2)$.

4. Как модифицировать рассказанный на лекции алгоритм, проверяющий выполнимость формулы в 2-КНФ, чтобы он за полиномиальное от числа переменных время также выдавал набор значений переменных, который выполняет формулу?

5. Формула в КНФ называется Хорновской, если каждый ее дизъюнкт содержит не более одной переменной без отрицания. Придумайте алгоритм, который за полиномиальное от длины входной формулы время проверит, выполнима ли Хорновская формула.

6. По формуле в 2-КНФ построим ориентированный граф. Вершинами графа будут множество переменных и отрицаний переменных. Для каждого дизъюнкта $(l_1 \vee l_2)$ в графе проводится два ребра из $\neg l_1$ в l_2 и из $\neg l_2$ в l_1. Докажите, что формула выполнима тогда и только тогда, когда для каждой переменной x вершины x и $\neg x$ находятся в разных компонентах сильной связности (т.е. либо из x нет пути в $\neg x$, либо из $\neg x$ нет пути в x).

2.6 Две формулы, содержащие только переменные и связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду $\vee$ заменить на $\wedge$ и наоборот.

2.7 С Марса доставили устройство, которое мгновенно по формуле в КНФ выдает ее набор значений переменных, который выполняет эту формулу, если такой набор существует. Покажите, как с помощью этого устройства раскладывать составные числа на произведение двух сомножителей, больших 1, за полиномиальное время от размера исходного числа.