Листок 4. Формулы и схемы

$\boxed{\textbf{1.}}$ Правило ослабление позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{2.}}$ а) Докажите, что при суммировании двоичных чисел $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ и $\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1}$ перенос в i-м разряде происходит тогда и только тогда, когда число $\overline{a_i a_{i-1} \ldots a_1}$ больше числа $\overline{b'_i b'_{i-1} \ldots b'_1}$, где $b'_k = 1 - b_k$ для всех k от 1 до n. Далее считаем, что $n = 2^m$. б) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_j a_{j-1} \ldots a_{j-2^k+1}}$ с $\overline{b'_j b'_{j-1} \ldots b'_{j-2^k+1}}$ для всех $k \leq m$ и всех j, кратных 2^k (при этом $j \leq n$). Результат сравнения можно хранить в двух битах: 00, если первое число меньше, 11, если первое число больше и 10, если числа равны. в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \ldots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \ldots b'_1}$ для всех i от 1 до n. г) Покажите, что существует схема для сложения двух n-битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух n-битных чисел размера $O(n^2)$ и глубины $O(\log n)$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Покажите, что если булева функция вычисляется с помощью схемы полиномиального от числа входов размера и глубиной $O(\log n)$, то она вычисляется и формулой полиномиального от числа переменных размера.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Докажите, что схема, вычисляющая булеву функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, которая зависит от всех n аргументов, имеет размер не меньше cn и глубину не меньше $c \log n$, где $c > 0$ — некоторая константа, которая зависит только от базиса схемы.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Функция голосования $Maj_{2k+1} : \{0,1\}^{2k+1} \to \{0,1\}$ равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы $k+1$ битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера $O(k)$.

3.5 Формула в КНФ называется Хорновской, если каждый ее дизъюнкт содержит не более одной переменной без отрицания. Придумайте алгоритм, который за полиномиальное от длины входной формулы время проверит, выполнима ли Хорновская формула.

3.6 По формуле в 2-КНФ построим ориентированный граф. Вершинами графа будут множество переменных и отрицаний переменных. Для каждого дизъюнкта $(l_1 \vee l_2)$ в графе проводится два ребра из $\neg l_1$ в l_2 и из $\neg l_2$ в l_1. Докажите, что формула выполнима тогда и только тогда, когда для каждой переменной x вершины x и $\neg x$ находятся в разных компонентах сильной связности (т.е. либо из x нет пути в $\neg x$, либо из $\neg x$ нет пути в x).