

### Листок 5. Предикатные формулы

1. Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трехместный предикат  $S$ . Интерпретация: точки на плоскости,  $S(X, Y, Z)$  означает, что  $|XZ| = |YZ|$ . Выразите предикаты а)  $A, B, C$  лежат на одной прямой; б)  $A, B, C, D$  — суть вершины параллелограмма; в)  $|AB| = |CD|$ ; г)  $OA < OB$ ; д) равенство треугольников; е) равенство углов; ж) свойство угла быть прямым.
  2. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры  $(=, <)$  на множестве целых чисел. Как выразить предикат  $y = x + 1$ ?
  3. Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры  $(=, +, y = x^2)$  на множестве вещественных чисел. Как выразить предикат  $xy = z$ ?
  4. Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двместный предикат «находиться на расстоянии 1». Как выразить предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2»?
  5. Приведите пример замкнутой формулы в сигнатуре  $\mathfrak{F} = \{=\}$ ,  $\mathfrak{F} = \{+, \times, 1\}$ , которая истинна в естественной интерпретации на множестве рациональных чисел, но ложна в естественной интерпретации на множестве вещественных чисел.
  6. На множестве  $\mathcal{N}$  задайте формулу в сигнатуре  $(S, =)$ , которая выражает предикат  $x = y + N$ , где  $S$  — это функция прибавления 1,  $N$  — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть  $O(\log_2 N)$ .
  7. Покажите, что предикат  $y = x + 1$  невыразим в интерпретации  $(\mathbb{Z}, =, x \mapsto x + 2)$ .
- 

**4.3** Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух  $n$ -битных чисел размера  $O(n^2)$  и глубины  $O(\log n)$ .