

Листок 6. (Не)выразимость и комбинаторика

1. Покажите, что предикат « p — n -ое простое число» является выразимым в арифметике.
 2. Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в интерпретации $(\mathcal{N}, =, “x \text{ делит } y”)$.
 3. Вычислите суммы а) $\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k}$; б) $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot \binom{n}{k}$.
 4. Найдите максимальное число среди $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$.
 5. а) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k натуральных слагаемых равно $\binom{n-1}{k-1}$. б) Докажите, что число способов разбить число n на сумму k целых неотрицательных слагаемых, равняется $\binom{n+k-1}{k-1}$. Порядок слагаемых имеет значение.
 6. Докажите, что число способов разбить число n на не более, чем k различных слагаемых совпадает с числом способов разбить число n на слагаемые, не превосходящие k . В этой задаче порядок слагаемых не имеет значения.
 7. Посчитайте число пар пересекающихся диагоналей в выпуклом n -угольнике.
 8. а) Сколько существует ломанных, идущих из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ шагами $(1, 1)$ и $(1, -1)$? б) Покажите, что число ломанных, из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, пересекающих прямую $y = -1$, равняется числу ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, -2)$. в) Найдите число ломанных из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, не опускающихся в нижнюю полуплоскость. Это число называется числом Каталана c_n . г) Покажите, что $c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_n c_1$.
 9. Сколько существует способов разбить выпуклый n -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями?
-

4.3 Пользуясь результатом предыдущей задачи, покажите, что существует схема для умножения двух n -битных чисел размера $O(n^2)$ и глубины $O(\log n)$.

5.6 На множестве \mathcal{N} задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.