Листок 8. Графы.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Докажите, что в любом графе есть две вершины одинаковой степени.

$\boxed{\textbf{2.}}$ а) Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно. б) Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Известно, что число черных вершин четно. Докажите, что можно в этом графе выкинуть несколько ребер так, чтобы в получившемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые вершины имели бы четную степень.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Докажите, что если в неориентированном графе n вершин и $n-k$ ребер, то в нем как минимум k компонент связности.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Имеется сетка в виде квадрата $n \times n$. Разрежается разрезать любое ребро сетки. Какое максимальное число разрезов можно сделать так, чтобы сетка все еще не развалилась на две части?

$\boxed{\textbf{5.}}$ а) Докажите, что из произвольного связного графа можно выкинуть вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным. б) В связном графе степени всех вершин не менее двух. Докажите, что в нем можно удалить две соединенные ребром вершины без потери связности.

$\boxed{\textbf{6.}}$ В связном графе на каждом ребре написали положительное число. Весом оствного дерева мы называем сумму чисел на ребрах, входящих в него. а) Докажите, что минимальное по весу остовное дерево содержит хотя бы одно ребро минимального веса. б) Докажите, что каждое минимальное ребро содержится хотя бы в одном из остовных деревьев минимального веса. в) Докажите, что остовное дерево, на котором достигается минимум суммы написанных чисел совпадает с одним из остовных деревьев, на котором достигается минимум суммы квадратов написанных чисел.

$\boxed{\textbf{7.}}$ В связном графе степени всех вершин равняются 10. Докажите, что этот граф останется связным, если из него удалить любое ребро.

$\boxed{\textbf{8.}}$ В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.

5.6 На множестве $\mathcal{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.