Листок 9. Графы и вероятность.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Докажите, что если $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то n команд могут так сыграть в волейбол (каждая команда играет с каждой ровно по одному разу, ничьих нет), чтобы для любых k команд нашлась бы команда, которая выиграла бы у этих k команд.

$\boxed{\textbf{2.}}$ В школе в каждом кружке учится $n \geq 4$ человек, число кружков не превосходит $\frac{4^{n-1}}{3^n}$. Докажите, что можно всем школьникам выставить оценки по поведению (четыре оценки: от 2 до 5), что в каждом кружке будут представлены все 4 оценки.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Пусть Ω — конечное пространство элементарных событий, P — вероятностная мера на Ω. Докажите формулу включений-исключений: Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ выполняется

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Пусть $\mathcal{F}$ — такое семейство подмножеств $[n]$, что для любых двух $A, B \in \mathcal{F}$ выполняется $A \cap B \neq \emptyset$. Покажите, что $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ называются независимыми, если $P(\bigcap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$. Приведите пример конечного вероятностного пространства и трех событий A, B, C, что любые два из них являются независимыми, но в совокупности они не являются независимыми.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Для двух строк $x, y \in \{0,1\}^n$ обозначим их скалярное произведение по модулю два: $<x, y> = \sum_{i=1}^n x_i y_i \bmod 2$. Чему равняется вероятность события $<x, y> = 1$, если строка y выбирается случайно (и все варианты равновероятны), а строка x фиксирована?

$\boxed{\textbf{7.}}$ Докажите, что если вершины неориентированного графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $k+1$ цвет так, чтобы концы любого ребра были покрашены в разные цвета.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $[k/2]+1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

$\boxed{\textbf{9.}}$ В сильно связном ориентированном графе (из каждой вершины можно добраться в каждую) у каждой вершины входящая степень равна исходящей. Докажите, что сущесвтует цикл, проходящий по каждому ребру ровно 1 раз.

$\boxed{\textbf{10.}}$ В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины **выходит** по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

5.6 На множестве $\mathcal{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.

8.8 В связном графе есть остовное дерево, в котором k висячих вершин и есть остовное дерево, в котором m висячих вершин. Докажите, что для любого числа ℓ между k и m в этом графе найдется остовное дерево, в котором ℓ висячих вершин.