

Список вопросов к теоретическому зачету  
по курсу «Основы математической логики и дискретной математики»

1. Пропозициональные формулы, интерпретации (вычисление значений пропозициональных формул), булевы функции, представление булевой функции в ДНФ и КНФ.
2. Тавтологии, противоречия, выполнимые формулы. Сведение вопроса о выполнимости пропозициональной формулы к вопросу о выполнимости формулы в КНФ.
3. Резолюционная система доказательств, корректность и полнота.
4. Алгоритм проверки выполнимости формулы в 2-КНФ с помощью резолюций.
5. Построение резолюционного доказательства по дереву расщепления.
6. Ориентированные графы без циклов. Топологическая сортировка. Схемы из функциональных элементов. Эквивалентность различных базисов.
7. Трюк Карацубы для построения схемы для умножения чисел размера  $o(n^2)$ .
8. Существование булевой функции, которая не вычисляется схемой размера  $2^n/Cn$ .
9. Формулы исчисления предикатов. Термы, атомарные формулы, свободные и связанные вхождения переменных, интерпретация и оценка, вычисление значения формулы. Выразимость в арифметике: примеры.
10. Кодирование конечных множеств в арифметике. Выразимость предиката "быть степенью 6".
11. Доказательство невыразимости предикатов с помощью автоморфизмов.
12. Конечные множества, число подмножеств данного множества, число размещений, число сочетаний (биномиальные коэффициенты), элементарные формулы с биномиальными коэффициентами, бином Ньютона, треугольник Паскаля.
13. Характеристическая функция множества, вычисление характеристической функции для пересечения, дополнения, объединения. Вывод формулы включений-исключений.
14. Пример использования формулы включения-исключения: подсчет числа счастливых билетиков.
15. Равномощные множества, равномощность двух отрезков, равномощность множества последовательностей из нулей и единиц и множества подмножеств натуральных чисел. Счетные множества, свойства счетных множеств.
16. Счетность множеств  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{N}^k$ , множества конечных последовательностей, алгебраических чисел. Объединение бесконечного и счетного множества. Равномощность  $[0, 1]$  и множества последовательностей из нулей и единиц. Равномощность квадрата и отрезка.
17. Теорема Кантора-Бернштейна и примеры применения.
18. Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел. Обобщенная теорема Кантора о неравномощности множества и множества его подмножеств. Существование неалгебраических чисел, существование подмножества натуральных чисел, характеристическая функция которого не вычисляется компьютерной программой.
19. Неориентированные и ориентированные графы, пути, циклы, связность, компоненты связности, сильная связность, компоненты сильной связности. Деревья и их свойства. Оценка на число ребер в связном графе.
20. Теорема Келли о подсчете числа деревьев. Доказательство с помощью кода Прюффера.
21. Эйлеров путь и цикл. Раскраски графов, критерий двудольности графа.

- 22.** Конечное вероятностное пространство, пространство элементарных событий, события. Свойства вероятности. Пример о галстуках.
- 23.** Теорема Эрдеша-Ко-Радо.
- 24.** Случайные величины. Математическое ожидание и его линейность. Турнир с большим числом гамильтоновых путей.
- 25.** Набор, выполняющий хотя бы  $\frac{7}{8}$  дизъюнктов формулы в 3-КНФ. Неравенство Маркова. Вероятностный алгоритм, который находит такой набор.
- 26.** Независимые события, независимые случайные величины и их свойства. Распределение Бернулли. Закон больших чисел для распределения Бернулли.
- 27.** Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Дисперсия. Дисперсия суммы попарно независимых случайных величин.
- 28.** Неравенство Чебышева. Закон больших чисел для попарно независимых случайных величин.
- 29.** Условные вероятности, формула Байеса, формула полной вероятности.
- 30.** Лемма Фаркаша.
- 31.** Задача линейного программирования. Двойственные задачи линейного программирования и их свойства.
- 32.** Поток в графе. Задача о максимальном потоке и ее двойственная задача. Вывод теоремы Форда-Фолкерсона о том, что максимальный поток равен разрезу минимальной пропускной способности.
- 33.** Максимальный поток в графе с целочисленными пропускными способностями.
- 34.** Паросочетания и покрывающие множества. Теорема Кенига. Лемма Холла.
- 35.** Частично упорядоченные множества, цепи и антицепи. Теорема Дилвортса.
- 36.** Реберная теорема Менгера.
- 37.** Игра с угадыванием числа и одной ошибкой. Коды, исправляющие ошибки. Код Хемминга. Нижняя оценка на удлинение.
- 38.** Числа Рамсея  $R(m, n)$ , верхняя оценка через биномиальный коэффициент.
- 39.** Обобщение чисел Рамсея на  $s$ -элементные подмножества. Теорема Рамсея. Случай многих цветов.
- 40.** Нижняя оценка на  $R(k, k)$ . Бесконечный вариант теоремы Рамсея.
- 41.** Примеры использования теоремы Рамсея: теорема Эрдеша-Секереша о выпуклом  $n$ -угольнике, раскраска натуральных чисел.

### Правила теоретического зачета

За теоретический зачет можно заработать до 44 баллов, итоговая оценка за курс получается суммированием числа бонусов за практику и числа баллов за теоретический зачет. Бонусные баллы за практику начисляются по 2 балла за каждую задачу, которую в подгруппе решил только один человек; число бонусных баллов можно узнать у преподавателя практики.

Оценка конвертируется в общепринятую так: 36 баллов на оценку «отлично», 24 балла на оценку «хорошо», 14 баллов на оценку «удовлетворительно».

Экзамен состоит из трех частей: теста, двух теоретических вопросов и задачи. Тест состоит из 5 простых вопросов на знание и понимание утверждений и определений из курса. Если вы отвечаете правильно на  $k$  вопросов из теста, то зарабатываете  $\lfloor 2^{k-1} \rfloor$  баллов. Во время теста ничем пользоваться нельзя.

На теоретические вопросы следует ответить полностью с доказательствами (кроме тех утверждений, которые в курсе доказаны не были). За полностью отвеченный

теоретический вопрос можно получить 10 баллов. Если Вы формулируете все утверждения из вопроса, но не можете их доказать, то получите 0 баллов, если вы не сможете даже сформулировать определения и утверждения, то за вопрос начисляется штраф 4 балла. В редких случаях возможно получение за теоретический вопрос частичного балла, если часть утверждений из вопроса доказано, а часть нет.

Если вы набираете как минимум 28 баллов, то выдается задача, за решение которой можно заработать 8 баллов.

При подготовке к ответу на теоретический вопрос можно пользоваться рукописной шпателькой, подготовленной заранее собственноручно на листе формата А4, больше ничем пользоваться нельзя.