

#### Задание 4 (на 08.10.14)

**СС21.** Выведите теорему Успенского–Райса из теоремы о неподвижной точке.

Вычислимая функция  $U(n, x)$  называется универсальной вычислимой функцией для вычислимых функций одного аргумента, если для любой другой вычислимой функции  $f$  найдется такое число  $m$ , что  $f(x) = U(m, x)$ .

Но не все универсальные вычислимые функции задают то, что мы понимаем под языками программирования. Требуется более сильное свойство. Вычислимая функция  $U(n, x)$  называется главной нумерацией, если для любой вычислимой функции  $V(n, x)$  найдется всюду определенная вычислимая функция  $s$ , что  $V(n, x) = U(s(n), x)$ .

**СС22.** а) Покажите, что функция  $U(n, x) = \langle n \rangle(x)$  является главной нумерацией. б) Покажите, что если теорема о неподвижной точке верна в одной главной нумерации, то она верна и в любой другой.

**СС23.** Докажите, что любой перечислимый предикат арифметичен.

**СС24.** Обозначим через  $K(x)$  лексикографически первый текст (строчки упорядочиваются сначала по длине, потом по алфавиту) алгоритма, который на пустом входе печатает  $x$  и останавливается. Докажите, что не существует алгоритма, который бы вычислял  $K(x)$ .

**Определение.** Ассоциативным исчислением называется конечный набор правил вида  $\{s_i \rightarrow t_i\}_{i \in I}$ , где  $s_i, t_i$  — строчки. Говорят, что строка  $y$  выводится из строки  $x$ , если из строки  $x$  можно получить строку  $y$ , заменяя несколько раз подстроку  $s_i$  на  $t_i$ . Ассоциативное исчисление называется двусторонним, если наряду с правилом  $s \rightarrow t$  есть и правило  $t \rightarrow s$ .

**СС25.** Покажите, что существует такое а) обыкновенное б) двустороннее ассоциативное исчисление, для которого вопрос о выводимости строки  $x$  из строки  $y$  является алгоритмически неразрешимым.

**СС26.** Покажите, что язык, состоящий из выполнимых формул в КНФ, в которых каждый дизъюнкт является либо хорновским (не более одной переменной без отрицания), либо состоит из двух литералов, является NP-трудным.

**СС27.** Покажите, что язык простых чисел содержится в классе а) co-NP; б) а) Докажите, что число  $n$  простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя  $q$  числа  $n-1$  существует  $a \in \{2, 3, \dots, n-1\}$  при котором  $a^{n-1} = 1 \pmod n$  и  $a^{\frac{n-1}{q}} \neq 1 \pmod n$ . в) Докажите, что язык простых чисел лежит в NP.

**СС8.** Покажите, что каждый язык, который принимается  $k$ -ленточной недетерминированной машиной Тьюринга за время  $f(n)$  может быть принят 2-ленточной недетерминированной машиной за время  $O(f(n))$ .

**СС16в.** Используя теорему Клини докажите, что существуют два различных алгоритма  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , что алгоритм  $\mathcal{A}$  печатает  $\#\mathcal{B}$ , а алгоритм  $\mathcal{B}$  печатает  $\#\mathcal{A}$ .

**СС20.** Хорновской формулой называется формула в ДНФ, в которой в каждый конъюнкт максимум одна переменная входит с отрицанием. Покажите, что множество хорновских тавтологий в ДНФ содержится в классе P