Задание 1. Булевы связки.

1. Докажите, а) что каждая булева функция имеет представление в виде многочлена от n переменных над полем $\mathbb{Z}_2$. И такое представление единственно. (Эти многочлены называются многочленами Жегалкина.)

2. Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, использовав только одну бинарную связку: $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$ или $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$. Покажите, что других таких связок нет.

Определение. 1) Булева функция называется мононотонной, если ее значение не уменьшается, при замене значения одной из ее переменных с 0 на 1. 2) Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \dots 1-x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. 3) Функция называется линейной, если в ее многочлене Жегалкина во все мономы входит не более, чем одна переменная.

3. Докажите, что любую монотонную функцию можно записать формулой ИВ, использующей только $\wedge$ и $\vee$.

4. Проверьте, что следующие классы функций, замкнуты относительно композиции: а) монотонные; б) самодвойственные; в) линейные; г) сохраняющие ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 0$); д) сохраняющие 1 (т.е., $f(1, \dots, 1) = 1$).

5. (Теорема Поста.) Пусть у нас есть несколько булевых функций, среди которых есть не монотонаая, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1, \dots, 1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что с помощью композиций этих функций можно получить а) отрицание, константу 1, константу 0; б) любую булеву функцию.

Задание 1. Булевы связки.

1. Докажите, а) что каждая булева функция имеет представление в виде многочлена от n переменных над полем $\mathbb{Z}_2$. И такое представление единственно. (Эти многочлены называются многочленами Жегалкина.)

2. Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, использовав только одну бинарную связку: $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$ или $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$. Покажите, что других таких связок нет.

Определение. 1) Булева функция называется мононотонной, если ее значение не уменьшается, при замене значения одной из ее переменных с 0 на 1. 2) Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \dots 1-x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. 3) Функция называется линейной, если в ее многочлене Жегалкина во все мономы входит не более, чем одна переменная.

3. Докажите, что любую монотонную функцию можно записать формулой ИВ, использующей только $\wedge$ и $\vee$.

4. Проверьте, что следующие классы функций, замкнуты относительно композиции: а) монотонные; б) самодвойственные; в) линейные; г) сохраняющие ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 0$); д) сохраняющие 1 (т.е., $f(1, \dots, 1) = 1$).

5. (Теорема Поста.) Пусть у нас есть несколько булевых функций, среди которых есть не монотонаая, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1, \dots, 1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что с помощью композиций этих функций можно получить а) отрицание, константу 1, константу 0; б) любую булеву функцию.

Задание 1. Булевы связки.

1. Докажите, а) что каждая булева функция имеет представление в виде многочлена от n переменных над полем $\mathbb{Z}_2$. И такое представление единственно. (Эти многочлены называются многочленами Жегалкина.)

2. Докажите, что любую булеву функцию можно выразить, использовав только одну бинарную связку: $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$ или $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$. Покажите, что других таких связок нет.

Определение. 1) Булева функция называется мононотонной, если ее значение не уменьшается, при замене значения одной из ее переменных с 0 на 1. 2) Булева функция называется самодвойственной, если выполняется равенство $f(1-x_1, 1-x_2, \dots 1-x_n) = 1 - f(x_1, \dots, x_n)$. 3) Функция называется линейной, если в ее многочлене Жегалкина во все мономы входит не более, чем одна переменная.

3. Докажите, что любую монотонную функцию можно записать формулой ИВ, использующей только $\wedge$ и $\vee$.

4. Проверьте, что следующие классы функций, замкнуты относительно композиции: а) монотонные; б) самодвойственные; в) линейные; г) сохраняющие ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 0$); д) сохраняющие 1 (т.е., $f(1, \dots, 1) = 1$).

5. (Теорема Поста.) Пусть у нас есть несколько булевых функций, среди которых есть не монотонаая, не сохраняющая ноль (т.е., $f(0, \dots, 0) = 1$), не сохраняющая единицу (т.е., $g(1, \dots, 1) = 0$), не линейная, не самодвойственная. Докажите, что с помощью композиций этих функций можно получить а) отрицание, константу 1, константу 0; б) любую булеву функцию.