

Задание 3.

- 12.** Пусть сигнатура содержит одноместный функциональный символ S и предикат равенства. Интерпретация: натуральные числа, $S(x) = x + 1$. Докажите, что предикат $y = x + N$, где N — большая константа можно выразить формулой длины $O(\log N)$.
- 13.** Пусть сигнатура содержит предикат равенства и трехместный предикат S . Интерпретация: точки на плоскости, $S(X, Y, Z)$ означает, что $|XZ| = |YZ|$. Выразите предикаты а) A, B, C лежат на одной прямой; б) A, B, C, D — суть вершины параллелограмма; в) $|AB| = |CD|$; г) $OA < OB$; д) равенство треугольников; е) равенство углов; ж) свойства угла быть прямым.
- 14.** Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $(=, <)$ на множестве целых чисел. Выразите предикат $y = x + 1$.
- 15.** Рассмотрим множество действительных чисел как интерпретацию сигнатуры $(=, +, y = x^2)$. Как выразить предикат $xy = z$?
- 16.** Рассмотрим множество целых положительных чисел как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства и двуместный предикат “ x делит y ”. Выразите свойства “равняться единице”, “быть простым числом”.
- 17.** Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства, “предикат находится на расстоянии 1”. Выразите предикаты “находится на расстоянии 2” и “находится на расстоянии не более 2”.
- 18.** Покажите, что предикат “ x есть n -ое простое число” арифметичен.
- 19.** Покажите, что предикат $y = x + 1$ невыразим в интерпретации $(\mathbb{Z}, =, x \mapsto x + 2)$.