

Задачи к зачету по математической логике

1. Докажите, что существует возрастающая вычислимая последовательность рациональных чисел a_n , которая ограничена сверху, такая, что нет алгоритма, который бы по k выдавал бы n , что $\alpha - a_n < 2^{-k}$, где $\alpha = \lim a_n$.
2. Рассмотрим резолюционную систему доказательств для исчисления предикатов. Система доказывает, что замкнутая формула является противоречивой следующим образом: формула приводится в предваренную нормальную форму, затем проводится скюлемизация (избавляемся от функциональных символов). Получается формула $\forall x_1 \forall x_2 \dots x_k \phi$, приводим ϕ в КНФ, пусть A — это множество полученных кловов. Опровержением полученной формулы является список кловов, заканчивающийся пустым кловом, каждый клов из списка либо принадлежит A , либо получается подстановкой замкнутого термина вместо переменной из одного из предыдущих кловов, либо выводится по правилу резолюции из двух предыдущих. Докажите, что такая система корректна и полна.
3. Пусть пропозициональная формула $\varphi \rightarrow \psi$ является тавтологией. а) Докажите, что найдется такая формула τ , которая включает только общие для φ и ψ переменные, что формулы $\varphi \rightarrow \tau$ и $\tau \rightarrow \psi$ являются тавтологиями. б) Если при этом φ и ψ монотонные формулы, то τ можно выбрать монотонной.
4. Описать множество выражимых предикатов в интерпретациях: а) $(\mathbb{Q}, =, S)$, где $S(x)$ — это прибавление единицы, б) $(\mathbb{N}, =, S)$, в) $(\mathbb{N}, =, S, P)$, где $P(x)$ значит “быть степенью двойки”.
5. Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна а) $(\mathbb{N} + \mathbb{N}, =, <)$, б) $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, =, <)$?
6. Будут ли теории $Th(\mathbb{Z}, =, <)$ и $Th(\mathbb{N}, =, <)$ конечно аксиоматизированными?
7. Покажите, что функция, обратная к примитивно рекурсивной биекции $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, может не быть примитивно рекурсивной.
8. Пусть Γ — множество замкнутых формул в сигнатуре с равенством. Покажите, что замкнутая формула φ этой сигнатуры истинна во всех нормальных моделях Γ тогда и только тогда, когда она выводима из Γ и аксиом равенства.
9. Покажите, что существует два различных алгоритма с номерами p и q , такие, что алгоритм p на всех входах печатает q , а алгоритм q на всех входах печатает p .
10. Пусть A — это множество номеров алгоритмов, которые останавливаются на пустом входе. Постройте множество, которое не является A -перечислимым и его дополнение не является A -перечислимым. В какой самый маленький уровень арифметической иерархии такое множество может попасть?