

Математическая логика (весенний семестр 2009)

1. Формулы исчисления высказываний. Интерпретации. Булевы функции и их представление в КНФ и ДНФ. Алгоритм приведения в КНФ/ДНФ.
2. Булева схема. Эффективная булева схема для сложения чисел.
3. Гильбертовское исчисление высказываний. Корректность. Вывод $A \rightarrow A$.
4. Лемма о дедукции.
5. Основные правила натурального вывода.
6. Совместность и непротиворечивость списка формул. Теорема о полноте гильбертовского исчисления.
7. Исчисление секвенций. Корректность и полнота.
8. Резолюционная система доказательств. Полнота и корректность. Связь с алгоритмами расщепления.
9. Формулы исчисления предикатов. Сигнатура. Интерпретации. Примеры.
10. Выразимость в арифметике. Выразимость предиката, перечисляющего все конечные множества. Выразимость предиката $x = 4^n$.
11. Невыразимые предикаты. Метод автоморфизмов. Примеры.
12. Элиминация кванторов в (\mathbb{Z}, s) , $(\mathbb{Z}, s, 0, =)$, $(\mathbb{Z}, =, <, s)$ и невыразимость предикатов.
13. Элиминация кванторов в $(\mathbb{Q}, =, <)$. Теорема о разрезании квадрата на меньшие квадраты.
14. Элиминация кванторов в теории алгебраически-замкнутых полей.
15. Элементарная эквивалентность, элементарное расширение. Примеры. Теорема Гильберта о нулях.
16. Исчисление предикатов. Тавтологии, получающиеся из пропозициональных. Корректность подстановки, кванторные аксиомы. Правила Бернаиса.
17. Примеры выводимых в исчислении предикатов формул.
18. Лемма о дедукции в исчислении предикатов. Лемма о свежих константах.
19. Совместность и непротиворечивость списка формул. Теорема о полноте.
20. Теорема Левенгельма-Сколема о существовании счетной модели.
21. Теорема о компактности исчисления предикатов.
22. Предваренная нормальная форма.
23. Выводимость бескванторных формул. Теорема Эрбрана.
24. Скулемизация.
25. Аксиомы равенства. Теорема о полноте для нормальных моделей. Теорема о компактности для нормальных моделей.
26. Повышение мощности модели.
27. Аксиоматизация теории $Th(\mathbb{Z}, =, S, 0)$. Показать, что это теория не является конечно аксиоматизируемой. Аксиоматизация теории алгебраически-замкнутых полей.
28. Арифметика. Нестандартная модель $Th(\mathbb{N}, =, +, \times)$. Аксиомы Пеано.
29. Вычислимые функции, разрешимые множества, определения перечислимого множества.
30. Теорема Поста. Перечислимые множества, как проекции разрешимых. Вычислимость функции и перечислимость ее графика.
31. Вычислимая функция, которую нельзя доопределить до всюду определенной. Пример перечислимого, но неразрешимого множества.
32. Неразрешимость задачи остановки МТ на пустом входе. Неразрешимость исчисления предикатов.
33. Теорема Успенского-Райса.
34. Арифметичность вычислимых функций. β -функции Геделя.
35. Прямое доказательство теорем Геделя о неполноте и Тарского.
36. Теорема Клини о неподвижной точке.
37. Универсальное перечислимое множество. m -сводимость. m -полное перечислимое множество.
38. Вычисления с оракулом, сводимость по Тьюрингу. Пример неперечислимого множества, дополнение которого тоже неперечислимо.
39. Арифметическая иерархия.
40. Другое доказательство теорем Тарского и Геделя (использующее арифметическую иерархию).
41. Примитивно-рекурсивные функции. Примеры. Примитивно-рекурсивные функции и Машины Тьюринга.
42. Частично-рекурсивные и вычислимые функции. Теорема Клини о нормальной форме. Перечислимое множество, как проекция примитивно рекурсивного.
43. Примеры вычислимых, но не примитивно рекурсивных функций: диагональная конструкция, функция Аккермана. Оценка скорости роста примитивно-рекурсивных функций.