Задание 1.

$\boxed{\textbf{DM1.}}$ Найдите все собственные числа полного графа с n вершинами а) без петель; б) с петлями.

$\boxed{\textbf{DM2.}}$ Пусть собственные числа матрицы смежности графа с n вершинами и m ребрами (в графе нет петель и кратных ребер) равны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Вычислите а) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$; б) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$; в) Какой смысо у $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3$.

$\boxed{\textbf{DM3.}}$ Докажите, что спектр (собственные числа) матрицы смежности регулярного графа симметричны относительно 0 тогда и только тогда, когда он двудольный.

$\boxed{\textbf{DM4.}}$ Если A, B — это симметрические стохастические матрицы (сумма элемнтов по строкам равна 1), а $\lambda(M)$ — это модуль второго по величине собственного числа, то $\lambda(A+B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$.

$\boxed{\textbf{DM5.}}$ Докажите, что в любом d-регулярном графе с n вершинами найдется такое множество S из $\frac{n}{2}$ вершин, что $E(S, \overline{S}) \leq \frac{dn}{4}$.

$\boxed{\textbf{DM6.}}$ Рассмотрим случайный двудольный граф, в котором вершины разбиты на две доли: L и R по n вершин в каждой доле. Для каждой вершины левой доли выбирается независимо случайным образом d соседей из правой доли (кратные ребра разрешены). Докажите, что для всех $\epsilon > \frac{1}{d}$ найдется такое число $\alpha > 0$, что с большой вероятностью выполняется следующее свойство: для каждого множества $S \subseteq L$ размера не больше $\frac{\alpha n}{d}$ выполняется $|\Gamma(S)| \geq |S|(1 - \epsilon)d$.