Задание 11.

$\boxed{\textbf{DM 29.}}$ Какой наименьший размер может иметь непустое множество точек S на проективной плоскости порядка q, обладающее свойством, что каждая прямая, которая пересекает S, пересекает S как минимум дважды.

$\boxed{\textbf{DM 30.}}$ Пусть S — множество точек на проективной плоскости порядка q. Никакие 3 точки из S не лежат на одной прямой. Докажите, что $|S| \leq q + 2$.

$\boxed{\textbf{DM 31.}}$ Пусть X — конечное множество точек. $\mathcal{L} \subseteq 2^X$ — множество прямых. Известно, что прямых хотя бы две и каждая прямая содержит как минимум 2 точки и, что каждые две точки лежат ровно на одной прямой. Докажите, что $|\mathcal{L}| \geq |X|$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда любые две прямые пересекаются ровно в одной точке.

$\boxed{\textbf{DM 25.}}$ Докажите, что при $0 \leq \alpha \leq 1$ и независимых X и Y выполняется неравенство $H[\alpha X + (1 - \alpha)Y] \geq \alpha H[X] + (1 - \alpha)H[Y]$.

$\boxed{\textbf{DM 26.}}$ Число ван дер Вардена $W(2, k)$ — это наименьшее такое n, что при любой раскраске $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 2 цвета найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины k. Докажите, что $W(2k) \geq 2^k/(2ek)$.

$\boxed{\textbf{DM 27.}}$ Пусть $n \geq 4$, $\mathcal{F}$ — семейство подграфов полного графа на n вершинах, причем пересечение любых двух графов из $\mathcal{F}$ содержит треугольник. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leq 2^{C_n^2 - 2}$.