

Задание 2.

DM7. Докажите, что хроматическое число алгебраического (n, d, α) -экспандера больше, чем $\frac{1}{\alpha}$.

DM8. G является (n, d, α) -экспандером. Пусть S множество из ρn вершин графа. Докажите, что в подграфе, индуцированном вершинами S не более $\frac{dn}{2}(\rho^2 + \alpha\sqrt{\rho(1-\rho)})$ ребер.

DM9. Пусть G — это алгебраический (n, d, α) -экспандер. Пусть $k \leq \frac{1}{\alpha}$ и n делится на k . Докажите, что если покрасить вершины в k цветов так, чтобы каждый цвет использовался ровно $\frac{n}{k}$ раз, то найдется хотя бы одна вершина, среди соседей которой встречаются все k цветов.

DM4. Если A, B — это симметрические стохастические матрицы (сумма элементов по строкам равна 1), а $\lambda(M)$ — это модуль второго по величине собственного числа, то $\lambda(A + B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$.

DM5. Докажите, что в любом d -регулярном графе с n вершинами найдется такое множество S из $\frac{n}{2}$ вершин, что $E(S, \bar{S}) \leq \frac{dn}{4}$.

DM6. Рассмотрим случайный двудольный граф, в котором вершины разбиты на две доли: L и R по n вершин в каждой доле. Для каждой вершины левой доли выбирается независимо случайным образом d соседей из правой доли (кратные ребра разрешены). Докажите, что для всех $\epsilon > \frac{1}{d}$ найдется такое число $\alpha > 0$, что с большой вероятностью выполняется следующее свойство: для каждого множества $S \subseteq L$ размера не больше $\frac{\alpha n}{d}$ выполняется $|\Gamma(S)| \geq |S|(1 - \epsilon)d$.