Задание 2.

В этом задании мы считаем, что все схемы и формулы имеют гейты $\vee, \wedge$ и $\neg$. Когда речь идет о схемах константой глубины, то арность $\vee, \wedge$ не ограничена. Размером фомрулы мы будем называть число листьев в дереве, которое эту формулу представляет. Для булевой функции f обозначим через $L(f)$ формульную сложность функции f. B_n обозначает множество всех булевых функций из $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$.

$\boxed{\textbf{CC5.}}$ Формальной мерой сложности называется отображение из B_n в $\mathbb{N}$, обладающее следующими свойствами:

- $FC(x_i) = 1$
- $FC(f) = FC(\neg f)$
- $FC(f \vee g) \leq FC(f) + FC(g)$

а) Докажите, что $FC(f \wedge g) \leq FC(f) + FC(g)$; б) Покажите, что $L(f)$ — это формальная мера сложности; в) (лемма Патерсона) Докажите, что для любой формальной меры сложности FC выполняется неравенство: $L(f) \geq FC(f)$

$\boxed{\textbf{CC6.}}$ Для множеств $A, B \subseteq \{0,1\}^n$ обозначим через $H(A,B)$ — множество пар-соседей $\{(a,b) \in A \times B \mid \rho(a,b) = 1\}$, тут ρ — это расстояние Хемминга. Определим $K_{AB} = \frac{|H(A,B)|^2}{|A||B|}$ и функцию $K(f) = \max\{K_{AB} | A \subseteq f^{-1}(1), B \subseteq f^{-1}(0)\}$. а) Докажите, что $K(f)$ — это формальная мера сложности. б) (Теорема Храпченко) Докажите, что $L(f) \geq K(f)$. в) Докажите, что $K(f) \leq n^2$. г) Докажите, что $L(MOD_2) = \Omega(n^2)$. д) Докажите, что $L(Maj) = \Omega(n^2)$.

$\boxed{\textbf{CC7.}}$ Покажите, что представление $\bigvee_{i=1}^n x_i$ в виде полинома $\mathbb{F}_q[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (q — простое число) требует степень ровно n.

$\boxed{\textbf{CC8.}}$ Докажите, что функция Maj не может быть вычислена с помощью полиномиального размера из гейтов схем константной глубины.