Задание 3. PCP

CC9. Пусть граф G является (n, d, α) — экспандером, S — множество вершин, $|S| \le n/2$. Рассмотрели случайный путь в G длины ℓ. Докажите, что вероятность того, что начало и конец этого пути лежат в множестве S, не превосходит $\frac{|S|}{n}(\frac{|S|}{n} + \alpha^\ell)$.

CC10. Дан граф G, который удовлетворяет следующим свойствам:

- является $(n, d, 0.9)$-экспандером;
- для каждой вершины как минимум половина исходящих ребер является петлями.

Каждая вершина графа может быть раскрашена в один из W цветов. У каждого ребра графа есть свои предпочтения, в зависимости от окраски его концов ребро становится довольным или недовольным. В каждой вершине графа сидит маляр, в намерения маляра входит покрасить все вершины, находящиеся на расстоянии не более $t + \sqrt{t}$ от данной (каждую вершину маляр может красить в один из W цветов). Два разных маляра могут желать покрасить одну вершину в разные цвета. Для каждой вершины v определяется популярный цвет следующим образом: выбираются все возможные пути длины t, исходящие из вершины v, для каждого пути маляр, стоящий в другом его конце сообщает, в какой цвет он хочет покрасить вершину v, популярным цветом называется тот, который назван наибольшее число раз (некоторые маляры могут голосовать несколько раз). Пусть F — это множество недовольных ребер при популярной раскраске, пусть они составляют долю ϵ, т.е. $|F| = \epsilon nd/2$.

Пусть δ — некоторая константа, значение которой будет выбрано позже. Для каждого пути $(i_1, i_2, \ldots, i_{2t+2})$ длины $2t+1$ в графе G для $j \in \{t+1, t+2, \ldots, t+\delta\sqrt{t}\}$ ребро (i_j, i_{j+1}) будем называть правдоподобным, если маляр, сидящий в i_1, хочет покрасить i_j в популярный цвет, а маляр, сидящий в i_{2t+2}, хочет покрасить i_{j+1} в популярный цвет. В асимптотических обозначениях далее числа d, W и δ считаются константами.

а) Докажите, что если случайный путь длины $t + \delta\sqrt{t}$ начинается в вершине v, а кончается в вершине u, то при достаточно маленьких δ, маляр в вершине u хочет покрасить вершину v в популярный цвет с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2W}$. (Указание: пользуйтесь тем, что в графе много петель.)

б) Пусть случайная величина H равняется числу недовольных (т.е. из множества F) правдоподобных ребер в случайном пути длины $2t+1$. Докажите, что $E[H] \ge \Omega(\sqrt{t}\epsilon)$.

в) Докажите, что для любой неотрицательной случайной величины X выполняется неравенство $\Pr[X > 0] \ge \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$.

г) Пусть случайная величина H' равняется числу недовольных ребер в промежутке от $t+1$ до $t + \delta\sqrt{t}$ в случайном пути длины $2t+1$. (Т.е. $H \le H'$). Пусть $\epsilon < O(\frac{1}{\sqrt{t}})$, докажите неравенство $E[H^2] \le E[H'^2] \le O(\epsilon\sqrt{t})$.

д) Докажите, что при $\epsilon < O(\frac{1}{\sqrt{t}})$ выполняется неравенство $\Pr[H > 0] \ge \Omega(\epsilon\sqrt{t})$. Другими словами, доля путей длины $2t+1$, в которых есть недовольные популярные ребра, не менее $\Omega(\epsilon\sqrt{t})$.

CC11. Докажите, что MOD_2 можно выразить с помощью полиномиальной по размеру схемы константной глубины, состоящей из Maj гейтов.