Задание 4.

$\boxed{\textbf{CC12.}}$ а) Докажите, что каждый (n, k)-источник является выпуклой комбинацией плоских (n, k)-источников. б) Пусть распределение Y — выпуклая комбинация распределений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$. Докажите, что для любого распредедения X выполняется $\delta(X, Y) \le \max_i\{\delta(X, Y_i)\}$. (Все распределения с носителем в $\{0,1\}^n$.)

$\boxed{\textbf{CC13.}}$ а) Покажите, что существует детерминированный $poly(n)$ алгоритм A, который получает вход, распределеный согласно распределению X с $H_\infty(X) \ge n^{100}$ и имеет оракульный доступ к функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, который удовлетворяет следующим свойствам:

- Если $\mathrm{E}[f(U_n)] \ge 2/3$, то A отвечает 1 с вероятностью хотя бы 0.99;
- Если $\mathrm{E}[f(U_n)] \le 1/3$, то A отвечает 0 с вероятностью хотя бы 0.99.

Такой алгоритм будем называть аппроксиматором функции.

б) Покажите, что не существует аппроксиматора без доступа к случайным числам.

в) Покажите, что если распределение X находится на расстоянии более $\frac{1}{5}$ от каждого распределения Y с $H_\infty(Y) \ge n/2$, то не существует аппроксиматора, вход которого распределен согласно распределению X.

$\boxed{\textbf{CC14.}}$ Prove that for any monotone formula F of size s there exists an equivalent formula of depth $O(logs)$.

$\boxed{\textbf{CC15.}}$ Пусть $f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n1}), \ldots, f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m})$ — произвольные булевы функции, зависящие от непересекающегося множества переменных. Докажите, что выполняется неравенство:

$$L\left(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n1}) \oplus \cdots \oplus f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m})\right) \ge \frac{1}{2} \sum_i L(f_i),$$

где $L(f)$ обозначает минимальное количество гейтов в $\{\wedge, \vee, \neg\}$-формуле, вычисляющей f.