Задание 5.

$\boxed{\textbf{CC16.}}$ Докажите, что если 0/1 перманент является полной задачей в классе $\sharp$P относительно сведений, сохраняющей число решений, то NP = RP.

Коммуникационная сложность. Алиса и Боб хотят совместно вычислить функцию $f : X \times Y \to Z$, причем Алиса знает $x \in X$, а Боб знает $y \in Y$. Коммуникационным протоколом называется бинарное дерево, листья которого помечены элементами Z, а в остальных вершинах которых стоят функции $a_i : X \to \{0,1\}$ или $b_j : Y \to \{0,1\}$. Вычисление по такому протоколу состоит в следующем: начиная от корня движимся по дереву к тому потомку, куда указывает функция, стоящая в вершине. Например, если в вершине стоит функция a_i и ее значение 1, то движемся к правому потомку, если 0, то к левому. (Значение функций $a_i(x)$ вычисляет Алиса, а $b_j(y)$ — Боб). В листе, к которому приводит путь из корня должно стоять значение функции $f(x,y)$. Коммуникационной сложностью функции f называется корректный протокол с минимальным числом листьев.

$\boxed{\textbf{CC17.}}$ Каждая функция $f : X \times Y \to Z$ задает раскраску элементов матрицы $M[X,Y]$ в цвета из множества Z. Прямоугольником называется множество $X' \times Y'$, где $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$. Прямоугольник $X' \times Y'$ называется одноцветным если все элементы $M[X',Y']$ покрашены в один цвет. Пусть $R(M)$ — минимальное число одноцветных прямоугольников, которыми можно покрыть все элементы M. а) Докажите, что $C(f) \geq R(M)$. б) Докажите, что $R(M) \geq \mathrm{rk}M$, если Z — это множество чисел.

Игры Карчмера-Вигдерсона. Дана функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Алиса получает $x \in f^{-1}(0)$, а Боб получает $y \in f^{-1}(1)$. Им требуется вычислить какую-нибудь координату i, что $x_i \neq y_i$. Для $B_0 \subseteq f^{-1}(0)$ и $B_1 \subseteq f^{-1}(1)$ обозначим $C(B_0, B_1)$ — коммуникационную сложность игры Карчмера-Вигдерсона, если Алиса получает элемент B_0, а Боб получает B_1.

$\boxed{\textbf{CC18.}}$ Докажите теорему Карчмера-Вигдерсона а) для $B_0 \subseteq f^{-1}(0)$ и $B_1 \subseteq f^{-1}(1)$ выполняется $L(f) \geq C(B_0, B_1)$; б) $L(f) = C(f^{-1}(0), f^{-1}(1))$, где $L(f)$ — формульная сложность в базисе $\{\wedge, \vee, \neg\}$ (минимальное число листьев).

$\boxed{\textbf{CC19.}}$ а) Пусть $M[X,X]$ это 0/1-матрица, которая содержит перестановочную матрицу размера $|X|$ (т.е. ее перманент над $\mathbb{R}$ не ноль). Докажите, что $R(M) \cdot T(M) \geq |X|^2$, где $T(M)$ — это число единиц в M. б) Докажите с помощью этой техники, что $L(MOD_2) = \Omega(n^2)$.

$\boxed{\textbf{CC15.}}$ Пусть $f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n1}), \ldots, f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m})$ — произвольные булевы функции, зависящие от непересекающегося множества переменных. Докажите, что выполняется неравенство:

$$L\left(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n1}) \oplus \cdots \oplus f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m})\right) \geq \frac{1}{2} \sum_i L(f_i),$$

где $L(f)$ обозначает минимальное количество гейтов в $\{\wedge, \vee, \neg\}$-формуле, вычисляющей f.