Задание 6.

$\boxed{\textbf{CC20.}}$ Докажите, что у случайной булевой функции с большой вероятностью $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ средняя сложность H_{avg} не меньше $2^{n/10}$ при больших n.

$\boxed{\textbf{CC21.}}$ Докажите, что если существует $S(\ell)$-псевдослучайный генератор, то существует такая функция $f \in \mathrm{E}$, что $H_{wrs}(f)(n) \geq S(n)$.

$\boxed{\textbf{CC22.}}$ Докажите, что если существует $f \in \mathrm{E}$ и $\epsilon > 0$, что $H_{avg}(f)(n) \geq 2^{\epsilon n}$ при всех n, то $\mathrm{MA} = \mathrm{NP}$.

$\boxed{\textbf{CC15.}}$ Пусть $f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n1}), \ldots, f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m})$ — произвольные булевы функции, зависящие от непересекающегося множества переменных. Докажите, что выполняется неравенство:

$$L\left(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n1}) \oplus \cdots \oplus f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn_m})\right) \geq \frac{1}{2} \sum_i L(f_i),$$

где $L(f)$ обозначает минимальное количество гейтов в $\{\wedge, \vee, \neg\}$-формуле, вычисляющей f.

$\boxed{\textbf{CC19.}}$ а) Пусть $M[X, X]$ это 0/1-матрица, которая содержит перестановочную матрицу размера $|X|$ (т.е. ее перманент над $\mathbb{R}$ не ноль). Докажите, что $R(M) \cdot T(M) \geq |X|^2$, где $T(M)$ — это число единиц в M. б) Докажите с помощью этой техники, что $L(MOD_2) = \Omega(n^2)$.