

## Задание 2.

- DM 7.** Докажите, что хроматическое число алгебраического  $(n, d, \alpha)$ -экспандера больше, чем  $\frac{1}{\alpha}$ .
- DM 8.**  $G$  является  $(n, d, \alpha)$ -экспандером. Пусть  $S$  множество из  $\rho n$  вершин графа. Докажите, что в подграфе, индуцированном вершинами  $S$  не более  $\frac{dn}{2}(\rho^2 + \alpha\sqrt{\rho(1-\rho)})$  ребер.
- DM 9.** Пусть  $G$  — это алгебраический  $(n, d, \alpha)$ -экспандер. Пусть  $k \leq \frac{1}{\alpha}$  и  $n$  делится на  $k$ . Докажите, что если покрасить вершины в  $k$  цветов так, чтобы каждый цвет использовался ровно  $\frac{n}{k}$  раз, то найдется хотя бы одна вершина, среди соседей которой встречаются все  $k$  цветов.
- DM 10.** Пусть  $G$  — это граф  $n$ -мерного куба  $\{0, 1\}^n$ , вершины соединены ребром, если они отличаются ровно в одной координате. а) Докажите, что ждя любого множества вершин  $S \subseteq V(G)$  число ребер, оба конца которых лежит в  $S$  не превосходит  $\frac{1}{2}|S|\log_2 |S|$  б) Найдите коэффициент реберного расширения  $G$ . в) Найдите второе собственное число  $G$ .
- DM 11.** Докажите, что если в  $d$ -регулярном графе  $G$  второе собственное число ограничено  $c\sqrt{d}$ , то размер независимого множества не превосходит  $\frac{cn}{\sqrt{d}}$
- 

- DM 4.** Если  $A, B$  — это симметрические стохастические матрицы (сумма элементов по строкам равна 1), а  $\lambda(M)$  — это модуль второго по величине собственного числа, то  $\lambda(A + B) \leq \lambda(A) + \lambda(B)$ .
- DM 5.** Докажите, что в любом  $d$ -регулярном графе с  $n$  вершинами найдется такое множество  $S$  из  $\frac{n}{2}$  вершин, что  $E(S, \bar{S}) \leq \frac{dn}{4}$ .
- DM 6.** Рассмотрим случайный двудольный граф, в котором вершины разбиты на две доли:  $L$  и  $R$  по  $n$  вершин в каждой доле. Для каждой вершины левой доли выбирается независимо случайным образом  $d$  соседей из правой доли (кратные ребра разрешены). Докажите, что для всех  $\epsilon > \frac{1}{d}$  найдется такое число  $\alpha > 0$ , что с большой вероятностью выполняется следующее свойство: для каждого множества  $S \subseteq L$  размера не больше  $\frac{\alpha n}{d}$  выполняется  $|\Gamma(S)| \geq |S|(1 - \epsilon)d$ .