Задание 3.

$\boxed{\textbf{DM12.}}$ Опишите графы Кэли для групп: а) $G = \mathbb{Z}$, $S = \{3\}$; б) $G = \mathbb{Z}6, S = \{2, -2\}$; в) G — группа симметрий квадрата, S — это множество из двух симметрий: относительно вертикальной оси и относительно главной диагонали; г) $G = S_n$, $S = A_n$.

$\boxed{\textbf{DM13.}}$ Пусть G — это алгебраический $(n, D, 1-\varepsilon)$-экспандер, а H — это алгебраический $(D, d, 1-\delta)$-экспандер. Докажите, что их зиг-заг произведение является $(nD, d^2, 1 - \frac{\varepsilon\delta}{8})$-экспандером.

$\boxed{\textbf{DM14.}}$ Пусть G — случайный граф на n вершинах, в котором каждая вершина независимо случайным образом выбирает себе d соседей (повторы разрешены). Докажите, что существует такая константа a, что с большой вероятностью размер независимого множества такого графа не больше, чем $an\frac{\log d}{d}$.

$\boxed{\textbf{DM15.}}$ В вершине связного d-регулярного графа сидит пингвин, который в каждый момент времени перепрыгивает в случайную соседнюю вершину, пока не окажется в фиксированной вершине v. Покажите, что среднее число его прыжков полиномиально относительно от числа вершин в графе.

$\boxed{\textbf{DM16.}}$ Докажите, что в любом связном недвудольном d-регулярном графе второе по модулю собственное число не превосходит а) $d - \Theta(1/n^c)$ для некоторого c; б) $(d - \Theta(1/n^2))$.

$\boxed{\textbf{DM9.}}$ Пусть G — это алгебраический (n, d, α)-экспандер. Пусть $k \le \frac{1}{\alpha}$ и n делится на k. Докажите, что если покрасить вершины в k цветов так, чтобы каждый цвет использовался ровно $\frac{n}{k}$ раз, то найдтется хотя бы одна вершина, среди соседей которой встречаются все k цветов.